
isas 理論マニュアル

目次

1. 座標系	3
1.1. 全体座標系	3
1.2. 要素座標系	3
1.3. コードアングル	5
2. 拘束条件	7
2.1. 固定拘束	7
2.2. 多点拘束	7
3. 要素	9
3.1. 梁要素	9
3.1.1. 要素座標系.....	9
3.1.2. 剛性マトリクス.....	9
3.1.3. 質量マトリクス.....	14
3.2. トラス要素	16
3.2.1. 要素座標系.....	16
3.2.2. 剛性マトリクス.....	16
3.2.3. 質量マトリクス.....	16
3.3. ばね要素	17
3.3.1. 要素座標系.....	17
3.3.2. 剛性マトリクス.....	17
3.4. SR ばね要素.....	18
3.4.1. 要素座標系.....	18
3.4.2. 剛性マトリクス.....	18
3.5. ダンパー要素	19
3.5.1. 要素座標系.....	19
3.5.2. 減衰マトリクス.....	19
4. 質量	20
5. 減衰	21
5.1. レイリー減衰	21
5.2. 要素別剛性比例減衰.....	22
5.3. 要素別レイリー減衰.....	22
6. 幾何学的非線形性.....	23
7. 材料非線形モデル.....	25
7.1. バイリニア（標準型）	25
7.2. バイリニア（非対称逆行型）	26

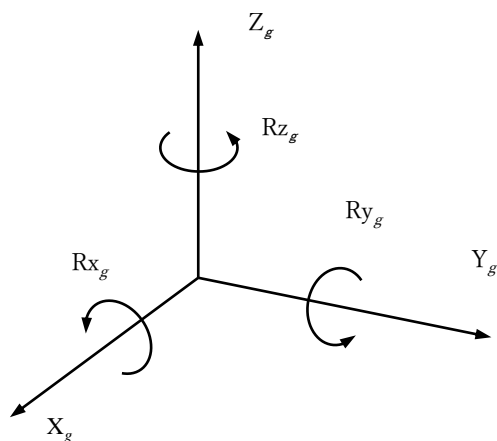
7.3. バイリニア（非対称ループ）	27
7.4. バイリニア（非対称スリップ）	28
7.5. トリリニア（標準型）	29
7.6. トリリニア（最大点指向型）	30
7.7. トリリニア（原点指向型）	31
7.8. トリリニア（原点・最大点指向型）	32
7.9. トリリニア（原点指向・鉄道標準型）	33
7.10. トリリニア（逆行型）	34
7.11. JR 総研剛性低減 RC 型	35
7.12. ペンタリニア（JR 内巻きスパイラル型）	38
7.13. 履歴関数型・双曲線	43
7.14. 履歴関数型・RO（Ramberg-Osgood モデル）	44
7.15. 履歴関数型・修正 GHE モデル	45
7.16. 履歴関数型・GHE-S モデル	49
7.17. 衝突ばね	53
7.18. ヒューズばね	54
7.19. スリップばね	55
7.20. 軸力変動（共通）	56
7.21. 履歴曲線の追跡	59
8. 作用荷重	62
8.1. 静的荷重	62
8.1.1. 節点荷重	62
8.1.2. 要素荷重	62
8.1.3. 自重・慣性力	63
8.1.4. 温度荷重	64
8.2. 動的荷重	65
8.2.1. 単一加速度入力	65
8.2.2. 多点加速度入力	66
9. 解析機能	68
9.1. 固有値解析	68
9.2. 静的解析	69
9.2.1. 荷重制御	69
9.2.2. 変位制御	69
9.2.3. 強制変位	71
9.3. 動的解析	72

1. 座標系

1.1. 全体座標系

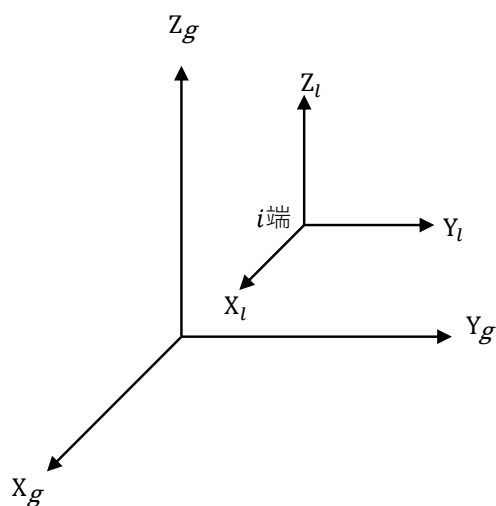
isas で用いる全体座標系は右手座標系としています。各節点は x, y, z の並進 3 方向および $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ の回転 3 方向の合計 6 自由度を持っています。

全体座標系は図に示すようになります。

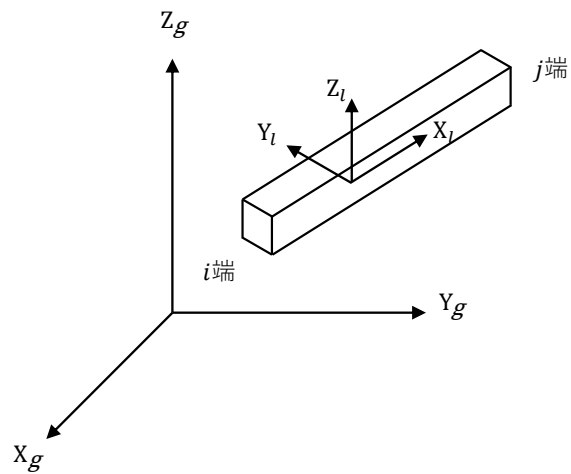


1.2. 要素座標系

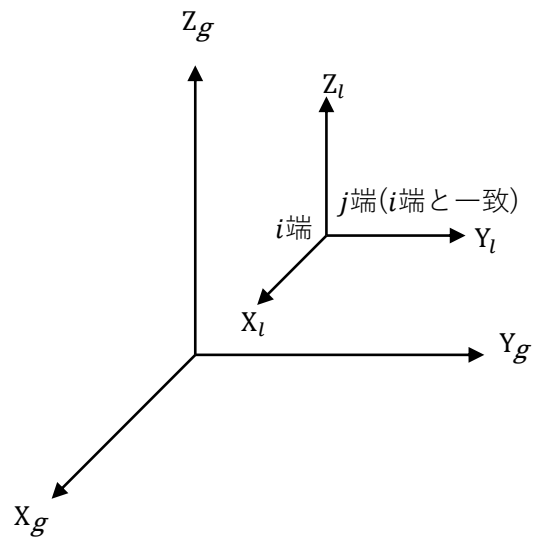
各要素には全体座標系とは独立して要素座標系が定義されます。1 節点から成る要素の場合、要素座標系は全体座標系と一致します。



梁要素などの 2 節点から成る要素の場合は、要素座標系は i 端から j 端に向かう方向を X_l 軸、後述するコードアングルにより Y_l 軸および Z_l 軸が定まります。コードアングルは軸方向にねじれている部材について使用します。

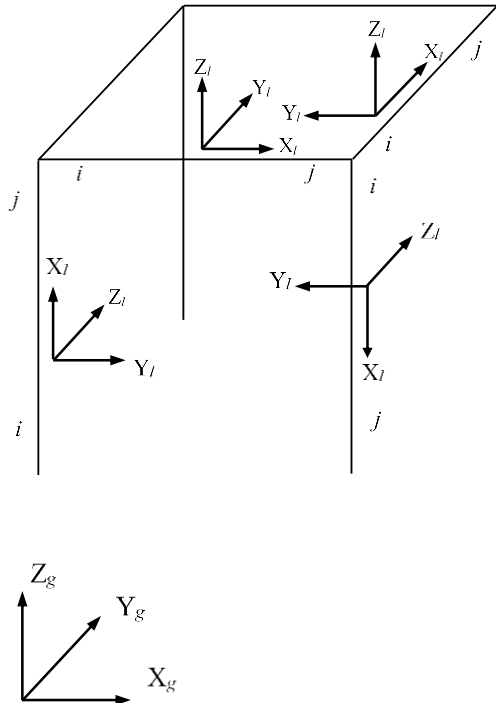


また、2 節点が同一の座標値 (2 重節点) の場合、要素座標系は全体座標系と一致します。

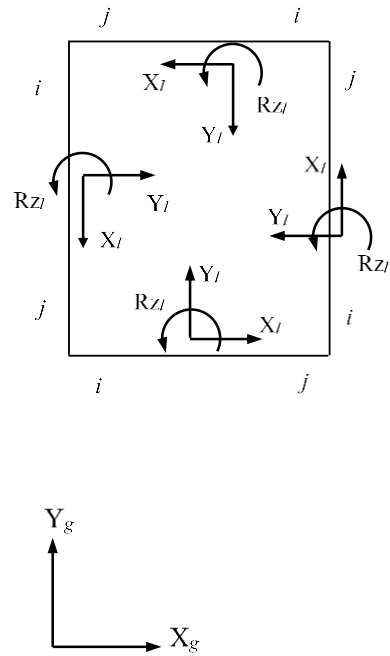


コードアングルを考慮しない場合の標準的な梁の要素座標系は以下ようになります。
方向や符号は断面力図に影響します。

3次元モデル、鉛直方向=Z軸の例



2次元モデル、XY平面内の例



1.3. コードアングル

梁要素などの2つの節点から成る要素は*i*端と*j*端から軸方向が決まりますが、軸回りの回転については決定できません。そのため、コードアングル¹⁾を導入して全体座標系における軸回りの回転角を定義します。コードアングルの定義の方法は以下のようになります。

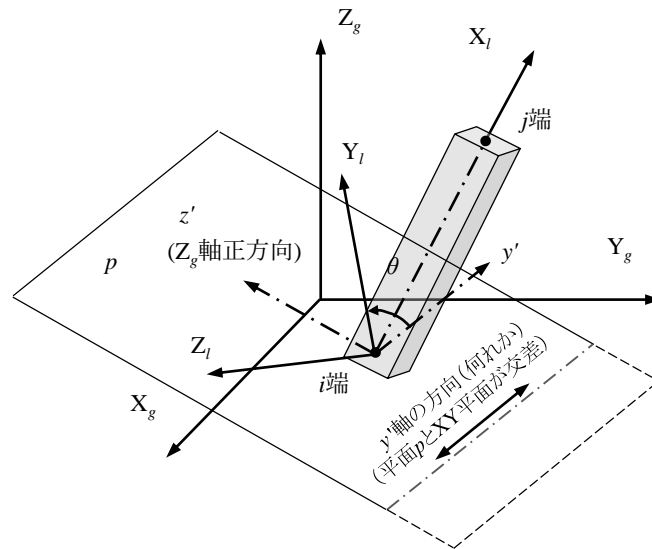
(1) 要素の X_l 軸が全体座標系の Z_g 軸と平行でない場合

まず、要素の X_l 軸に垂直な平面

を考えます。次にこの平面

上でXY平面に平行な y' 軸を考えます。その後、要素 X_l 軸と y' 軸で右手系の関係をなす z' 軸を考えます。 y' 軸の正の方向は z' 軸の正の方向が全体座標系の Z_g 方向が増加するように定義します。平面

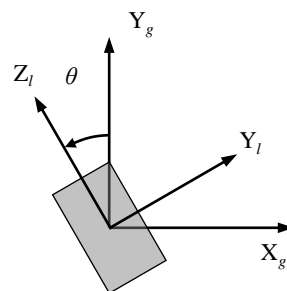
上で y' 軸から Y_l 軸へ回った角度 θ をコードアングルとします。コードアングルは X_l 軸回りに右ねじの方向を正とします。



全体座標系： X_g, Y_g, Z_g
 要素座標系： X_l, Y_l, Z_l
 平面 p ： i 端を含んで X_l と直行する面
 y' 軸：平面 p と XY 平面が交差する線上（方向は z' に依存）
 z' 軸： Z_g 軸の正側を z' 軸の正方向とする
 $Y_l \cdot Z_l$ 軸の方向：平面 p 内の X_l 軸回りの角度 θ で決まる

(2) 要素の X_l 軸が全体座標系の Z_g 軸と平行の場合

全体座標系の Y_g 軸から要素座標系の Z_l 軸へ図った角度 θ をコードアングルとします。コードアングルは要素座標系の X_l 軸回りに右ねじの方向を正とします。



参考文献

- 1) 信原泰夫, 桜井達美, 吉村信敏：有限要素法のプログラムデザイン, 培風館, 1972.

2. 拘束条件

2.1. 固定拘束

isas では、固定拘束の拘束条件が導入できます。任意の節点の自由度に対して拘束条件を適用すると、その節点の自由度に関する加速度、速度、変位は全て $\mathbf{0}$ で拘束されるものとします。全体変位ベクトルの第 k 行が拘束されているとすると、 k 行目の変位ベクトルは $\mathbf{0}$ で既知であるため、運動方程式を構成するマトリクスにおいて、 k 行目については考慮する必要がありません。また、全体マトリクスの k 列目と変位ベクトル k 行目の積も常に $\mathbf{0}$ であるため、 k 列目に関しても考慮する必要がありません。

そのため、運動方程式では拘束された自由度を縮約したマトリクスを解くことで、縮約した加速度、速度、変位ベクトルを求め、最後に拘束された自由度に零ベクトルを挿入することで、全節点の応答を求めます。

2.2. 多点拘束

多点拘束は、各自由度間の絶対変位に以下の線形関係式を与えます。

$$u_0 = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_6 u_6 \quad (2.2.1)$$

ここで、 u_0 は従属自由度、 $u_1 \sim u_6$ は独立自由度、 $a_1 \sim a_6$ は定数となります。

構造の静的な平衡方程式

$$Ku = F \quad (2.2.2)$$

において、独立自由度の変位 u_m 、従属自由度の変位を u_s とし、線形関係を R とすると、次の式が成り立ちます。

$$u_s = R u_m \quad (2.2.3)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_m \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} u_m \quad (2.2.4)$$

変位 u_m に対する等価剛性マトリクスを K^* とします。仮想変位 δu を導入し、2つの剛性マトリクスに対する仮想仕事等しいとすると、次のようになります。

$$\delta u_m^T K^* u_m = \delta u^T K u \quad (2.2.5)$$

$$= [\delta u_m^T \quad \delta u_s^T] K \begin{bmatrix} u_m \\ u_s \end{bmatrix} \quad (2.2.6)$$

$$= \delta u_m^T [I \quad R^T] K \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} u_m \quad (2.2.7)$$

したがって、

$$K^* = [I \quad R^T]K \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

となります。

同様に、等価質量マトリクス M^* 、等価荷重ベクトル F^* に対しても次の関係式が成り立ちます。

$$M^* = [I \quad R^T]M \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} \quad (2.2.9)$$

$$F^* = [I \quad R^T]F \quad (2.2.10)$$

まとめて表すと、

$$u_s = Ru_m \quad (2.2.11)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_m \\ u_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} u_m = Tu_m \quad (2.2.12)$$

なる線形関係があるときに、 m に縮合された自由度に対する等価マトリクスはそれぞれ次のように表されます。

$$K^* = T^T K T \quad (2.2.13)$$

$$M^* = T^T M T \quad (2.2.14)$$

$$F^* = T^T F \quad (2.2.15)$$

ただし、

$$T = \begin{bmatrix} I \\ R \end{bmatrix} \quad (2.2.16)$$

3. 要素

3.1. 梁要素

3.1.1. 要素座標系

梁要素の X_l 軸は i 端から j 端に向かう方向になります。梁要素の要素座標系の Y_l 軸の方向はコードアングルによって定義されます。

3.1.2. 剛性マトリクス

梁要素の剛性マトリクスは以下のようになります。

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} \end{bmatrix}$$

ただし、 $\phi_y = \frac{12EI_z}{GA_y L^2}$, $\phi_z = \frac{12EI_y}{GA_z L^2}$

E : ヤング率

G : せん断弾性係数

A : 断面積

A_y 、 A_z : 有効せん断断面積

I_y 、 I_z : 断面 2 次モーメント

J : 断面 2 次極モーメント

材端ピン条件がある場合、

XY 平面 i 端ピン

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & & & & & & & \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & & \\
 0 & \frac{-3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & & \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}
 \end{bmatrix}$$

Sym

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & & \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & \\
 0 & \frac{-3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & & \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}
 \end{bmatrix}$$

Sym

XY 平面 j 端ピン

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & & & & & & \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & \\
 0 & \frac{-3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

XZ 平面 i 端ピン

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & & & & & & \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & & \\
 0 & \frac{-3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & \\
 0 & 0 & \frac{-3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}
 \end{bmatrix}$$

XZ 平面 j 端ピン

	$\frac{EA}{L}$													
0	$\frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)}$													
0	0	$\frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)}$					Sym							
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$											
0	0	$\frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{(3+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)}$										
0	$\frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{(3+\phi_y)EI_x}{L(1+\phi_y)}$									
$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$								
0	$\frac{-3EI_z}{L^3(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{-3EI_x}{L^2(1+\phi_y)}$	0	$\frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)}$							
0	0	$\frac{-3EI_y}{L^3(1+\phi_z)}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)}$	0	0	0	$\frac{3EI_y}{L^3(1+\phi_z)}$						
0	0	0	$-\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0	0	$\frac{GJ}{L}$					
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	$\frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	$\frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$	0	$\frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)}$	0	0	0	0	$\frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}$		

XY 平面両端ピン

[illegible]

XZ 平面両端ピン

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & & & & & \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & \\
 0 & \frac{-3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-3EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{(3+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}
 \end{bmatrix}$$

ねじりピン（片端も同じ）

$$\begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & & & & & & & & & & \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & & & & & & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & & & & & & \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & & & & & \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & & & & \\
 0 & \frac{-12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & & & \\
 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI_y}{L(1+\phi_z)} \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)}
 \end{bmatrix}$$

初期軸力がある場合

部材座標系の剛性マトリクスに幾何剛性マトリクス K_G が付加されます。

$$K_G = \frac{f}{L} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 6/5 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 6/5 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2L^2/15 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -L/10 & 0 & 4L^2/30 & & & & & & & \\ 0 & L/10 & 0 & 0 & 0 & 4L^2/30 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -6/5 & 0 & 0 & 0 & -L/10 & 0 & 6/5 & & & & \\ 0 & 0 & -6/5 & 0 & L/10 & 0 & 0 & 0 & 6/5 & & & \\ 0 & 0 & 0 & -4L^2/30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2L^2/15 & & \\ 0 & 0 & -L/10 & 0 & -L^2/30 & 0 & 0 & 0 & L/10 & 0 & 4L^2/30 & \\ 0 & L/10 & 0 & 0 & 0 & -L^2/30 & 0 & -L/10 & 0 & 0 & 0 & 4L^2/30 \end{bmatrix}$$

f : 初期軸力

幾何学的非線形を考慮する場合、解析ステップごとに部材長 L も更新します。

3.1.3. 質量マトリクス

集中質量

$$\rho AL \begin{bmatrix} 1/2 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1/2 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1/2 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ρ : 質量密度

整合質量

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 156 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 156 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{140\rho J}{\rho A} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & -22L & 0 & 4L^2 & & & & & & & \\ 0 & 22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 & & & & & & \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & & & \\ 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L & 0 & 156 & & & & \\ 0 & 0 & 54 & 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & 156 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{70\rho J}{\rho A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140\rho J}{\rho A} & & \\ 0 & 0 & 13L & 0 & -3L^2 & 0 & 0 & 0 & 22L & 0 & 4L^2 & \\ 0 & -13L & 0 & 0 & 0 & -3L^2 & 0 & -22L & 0 & 0 & 0 & 4L^2 \end{bmatrix}$$

両端ピンの場合

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 140 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 140 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & & & \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & & \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

初期軸力がある場合

部材座標系の剛性マトリクスに幾何剛性マトリクス K_G が付加されます。

$$K_G = \frac{f}{L} \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

f : 初期軸力

幾何学的非線形を考慮する場合、解析ステップごとに部材長 L も更新します。

3.2. トラス要素

3.2.1. 要素座標系

トラス要素の X_i 軸は i 端から j 端に向かう方向になります。

3.2.2. 剛性マトリクス

トラス要素の剛性マトリクスは以下のようになります。

$$K = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

E : ヤング率

A : 断面積

3.2.3. 質量マトリクス

集中質量

$$\rho AL \begin{bmatrix} 1/2 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1/2 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1/2 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

整合質量

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 140 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 140 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & & & \\ 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & & \\ 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

3.3. ばね要素

3.3.1. 要素座標系

ばね要素の X_l 軸は i 端から j 端に向かう方向になります。ばね要素の要素座標系の Y_l 軸の方向はコードアングルによって定義されます。

3.3.2. 剛性マトリクス

ばね要素の剛性マトリクスは以下ようになります。

$$K = \begin{bmatrix} k_x & & & & & & & & & & & \\ 0 & k_y & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & k_z & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & k_{Rx} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{Ry} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{Rz} & & & & & & \\ -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_x & & & & & \\ 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_y & & & & \\ 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_z & & & \\ 0 & 0 & 0 & -k_{Rx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{Rx} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{Ry} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{Ry} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{Rz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{Rz} \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

k_x : X_l 方向のばね係数

k_y : Y_l 方向のばね係数

k_z : Z_l 方向のばね係数

k_{Rx} : X_l 軸回りのばね係数

k_{Ry} : Y_l 軸回りのばね係数

k_{Rz} : Z_l 軸回りのばね係数

3.4. SR ばね要素

3.4.1. 要素座標系

SR ばね要素の X_l 軸は i 端から j 端に向かう方向になります。SR ばね要素の要素座標系の Y_l 軸の方向はコードアングルによって定義されます。

3.4.2. 剛性マトリクス

ばね要素の剛性マトリクスは以下ようになります。

K

$$= \begin{bmatrix} k_x & & & & & & & & & & & \\ 0 & k_y & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & k_z & & & & & & & & & \\ 0 & k_{y-Rx} & k_{z-Rx} & k_{Rx} & & & & & & & & \\ k_{x-Ry} & 0 & k_{z-Ry} & 0 & k_{Ry} & & & & & & & \\ k_{x-Rz} & k_{y-Rz} & 0 & 0 & 0 & k_{Rz} & & & & & & \\ -k_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_x & & & & & \\ 0 & -k_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_y & & & & \\ 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_z & & & \\ 0 & 0 & 0 & -k_{Rx} & 0 & 0 & 0 & -k_{y-Rx} & -k_{z-Rx} & k_{Rx} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{Ry} & 0 & -k_{x-Ry} & 0 & -k_{z-Ry} & 0 & k_{Ry} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_{Rz} & -k_{x-Rz} & -k_{y-Rz} & 0 & 0 & 0 & k_{Rz} \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

k_x : X_l 方向のばね係数

k_y : Y_l 方向のばね係数

k_z : Z_l 方向のばね係数

k_{Rx} : X_l 軸回りのばね係数

k_{Ry} : Y_l 軸回りのばね係数

k_{Rz} : Z_l 軸回りのばね係数

k_{x-Ry} : X_l 方向と Y_l 軸回りの連成ばね係数

k_{x-Rz} : X_l 方向と Z_l 軸回りの連成ばね係数

k_{y-Rx} : Y_l 方向と X_l 軸回りの連成ばね係数

k_{y-Rz} : Y_l 方向と Z_l 軸回りの連成ばね係数

k_{z-Rx} : Z_l 方向と X_l 軸回りの連成ばね係数

k_{z-Ry} : Z_l 方向と Y_l 軸回りの連成ばね係数

3.5. ダンパー要素

3.5.1. 要素座標系

ダンパー要素の X_l 軸は i 端から j 端に向かう方向になります。ダンパー要素の要素座標系の Y_l 軸の方向はコードアングルによって定義されます。

3.5.2. 減衰マトリクス

ダンパー要素の減衰マトリクスは以下のようになります。

$$C = \begin{bmatrix} c_x & & & & & & & & & & & \\ 0 & c_y & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & c_z & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & c_{Rx} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{Ry} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{Rz} & & & & & & \\ -c_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_x & & & & & \\ 0 & -c_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_y & & & & \\ 0 & 0 & -c_z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_z & & & \\ 0 & 0 & 0 & -c_{Rx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{Rx} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{Ry} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{Ry} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{Rz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{Rz} \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

- c_x : X_l 方向の減衰係数
- c_y : Y_l 方向の減衰係数
- c_z : Z_l 方向の減衰係数
- c_{Rx} : X_l 軸回りの減衰係数
- c_{Ry} : Y_l 軸回りの減衰係数
- c_{Rz} : Z_l 軸回りの減衰係数

4. 質量

質量は節点の自由度に対して集中質量を設定します。回転自由度に対しては回転慣性質量を設定します。節点に設定された質量マトリクスは次式のようにになります。

$$M = \begin{bmatrix} m_x & & & & & & & & & & & \\ 0 & m_y & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & m_z & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & m_{Rx} & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{Ry} & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{Rz} & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_x & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_y & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_z & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{Rx} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{Ry} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{Rz} \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

m_x : X_l 方向の質量

m_y : Y_l 方向の質量

m_z : Z_l 方向の質量

m_{Rx} : X_l 軸回りの慣性モーメント

m_{Ry} : Y_l 軸回りの慣性モーメント

m_{Rz} : Z_l 軸回りの慣性モーメント

5. 減衰

5.1. レイリー減衰

レイリー減衰では減衰マトリクス C は質量マトリクス M と剛性マトリクス K に比例し、次式となります。

$$C = \alpha M + \beta K \quad (5.1.1)$$

固有ベクトル Φ を前後から乗じると次式となります。

$$\Phi^T C \Phi = \alpha \Phi^T M \Phi + \beta \Phi^T K \Phi \quad (5.1.2)$$

固有ベクトルの直交性と Φ の M に関する正規化を適用すると次式のようになります。

$$\Phi^T M \Phi = I \quad (5.1.3)$$

$$\Phi^T K \Phi = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_i^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.1.4)$$

$$\Phi^T C \Phi = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 2h_i \omega_i & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad (5.1.5)$$

よって、 i 次の減衰係数 h_i と固有円振動数 ω_i の関係は次式となります。

$$2h_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (5.1.6)$$

任意の2組の減衰定数と固有円振動数 $h_1, \omega_1, h_2, \omega_2$ を代入し、 α と β について解くと次式となります。

$$\begin{Bmatrix} 2h_1 \omega_1 \\ 2h_2 \omega_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \omega_1^2 \\ 1 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (5.1.7)$$

$$\alpha = \frac{2\omega_1 \omega_2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (h_1 \omega_2 - h_2 \omega_1) \quad (5.1.8)$$

$$\beta = \frac{2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} (h_2 \omega_2 - h_1 \omega_1) \quad (5.1.9)$$

以上のように求められた α と β を用いて減衰マトリクス C を決定します。

レイリー減衰では非線形解析において、剛性マトリクス K が更新された場合、減衰マトリクスは更新されません。

5.2. 要素別剛性比例減衰

要素別剛性比例減衰では、要素ごとの減衰が要素ごとの剛性に比例するものとし、その集計が全体減衰マトリクス C になると仮定し以下の式で表されます。

$$C = \sum_{i=1}^N \frac{2h_i}{\omega_1} K_i \quad (5.2.1)$$

ここで、 N ：全要素数

h_i ：要素 i の減衰定数

ω_1 ：1 次の固有円振動数(rad/sec)

K_i ：要素 i の要素剛性マトリクス

1 次の固有円振動数を与えることにより、要素ごとの剛性に対する比例係数を求め、減衰マトリクスを決定します。

要素別剛性比例減衰では、非線形解析において、剛性マトリクスが更新された場合、減衰マトリクスは更新されません。

5.3. 要素別レイリー減衰

要素別レイリー減衰では、要素ごとの減衰が要素ごとの質量と剛性に比例するものとし、その集計が全体減衰マトリクス C になると仮定し以下の式で表されます。

$$C = \sum_{i=1}^N (\alpha_i M_i + \beta_i K_i) \quad (5.3.1)$$

ここで、 N ：全要素数

M_i ：要素 i の要素質量マトリクス

K_i ：要素 i の要素剛性マトリクス

α_i ：要素 i の質量に対する比例係数

β_i ：要素 i の剛性に対する比例係数

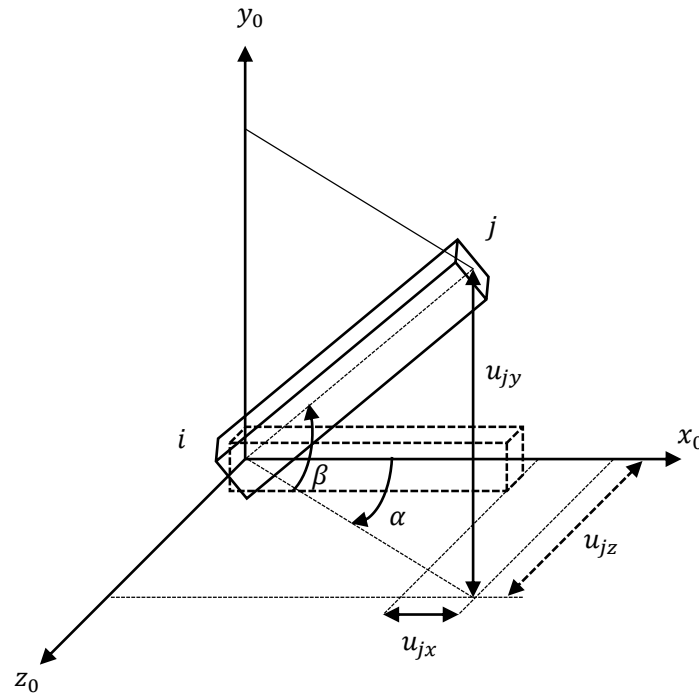
比例定数 α, β は要素ごとに指定します。

要素別レイリー減衰では、非線形解析において、剛性マトリクスが更新された場合、減衰マトリクスは更新されません。

6. 幾何学的非線形性

微小変位の仮定の下では局所座標系は常に一定ですが、大変形時には節点の変位に伴う要素の長さや方向の変化が無視できません。このような幾何学的非線形性を考慮する場合、局所座標系を各ステップで更新する必要があります。

初期の局所座標系を x_0 、 y_0 、 z_0 とします。初期の局所座標系での相対変位量を u_{jx} 、 u_{jy} 、 u_{jz} とします。この相対変位量を用いて初期の局所座標系から現在の局所座標系への回転角度 α 、 β を求めます。



y 軸回りに α 回転させるマトリクスを R_α 、 z 軸回りに β 回転させるマトリクスを R_β とすると、以下の式で表されます。

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

よって、初期の局所座標系から現在の局所座標系に変換するマトリクス R_d は次式のようにになります。

$$R_d = R_\beta R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \cos \beta & -\sin \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

実際には部材軸回りにねじれが生じているため、この変換を行った座標系 x' 、 y' 、 z' にお

ける i, j 端の x' 軸回りの回転角 γ_i, γ_j を求め、両者の平均値 $\gamma = (\gamma_i + \gamma_j)/2$ だけ回転することでねじれの補正を行います。この座標変換マトリクス R_γ は次式のようにあらわされます。

$$R_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

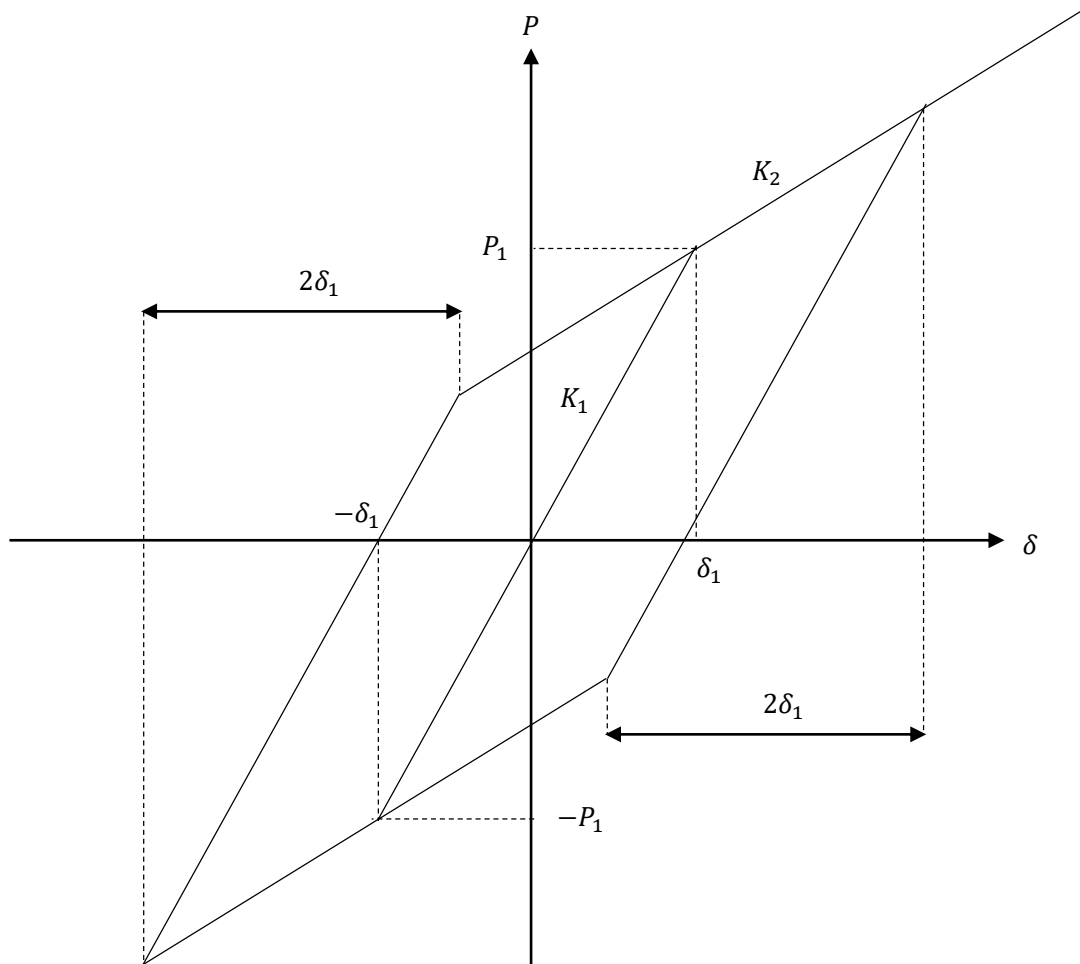
よって、全体座標系から初期の局所座標系への座標変換マトリクスを R とすると、最終的に全体座標系から現在の局所座標系への座標変換マトリクス R_m は次式のようにあらわされます。

$$R_m = R_\gamma R_d R \quad (6.5)$$

7. 材料非線形モデル

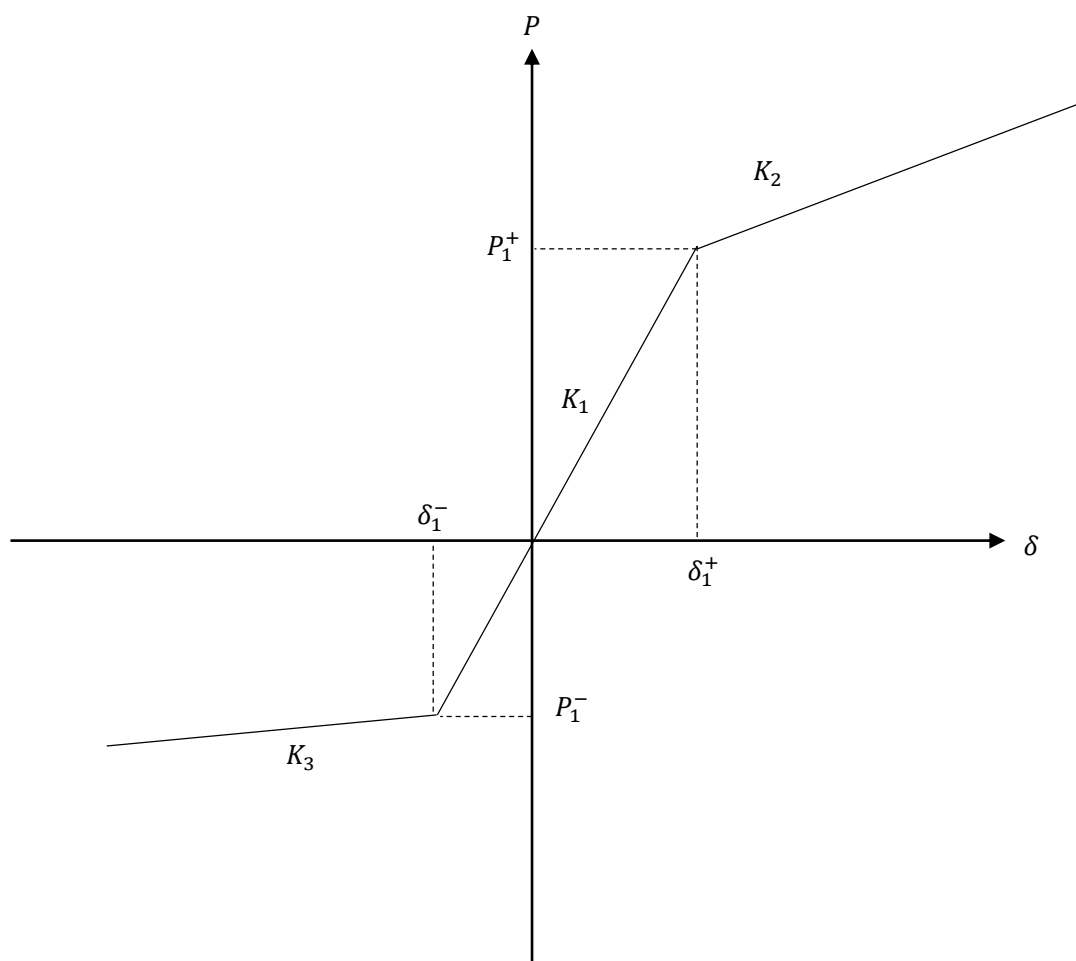
7.1. バイリニア (標準型)

骨格曲線がバイリニアで Masing の規則に従います.

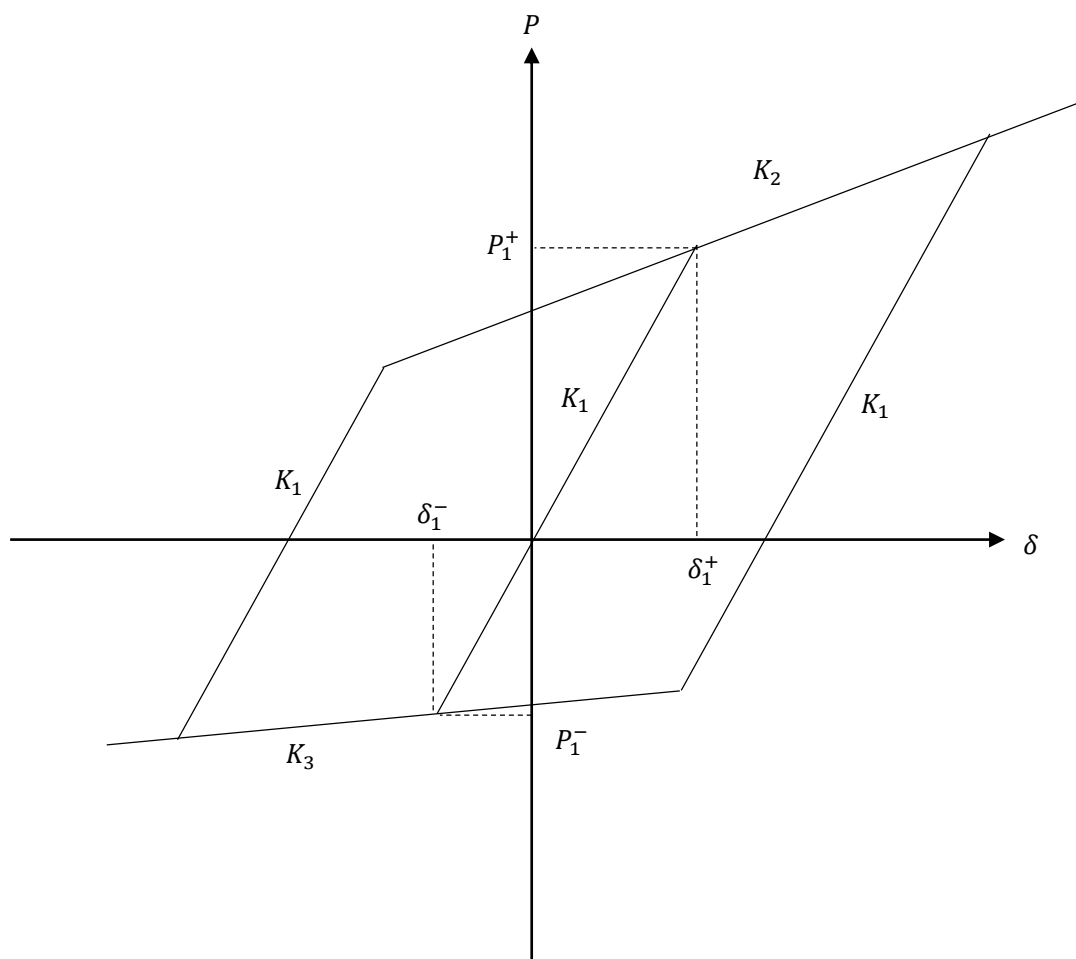


7.2. バイリニア（非対称逆行型）

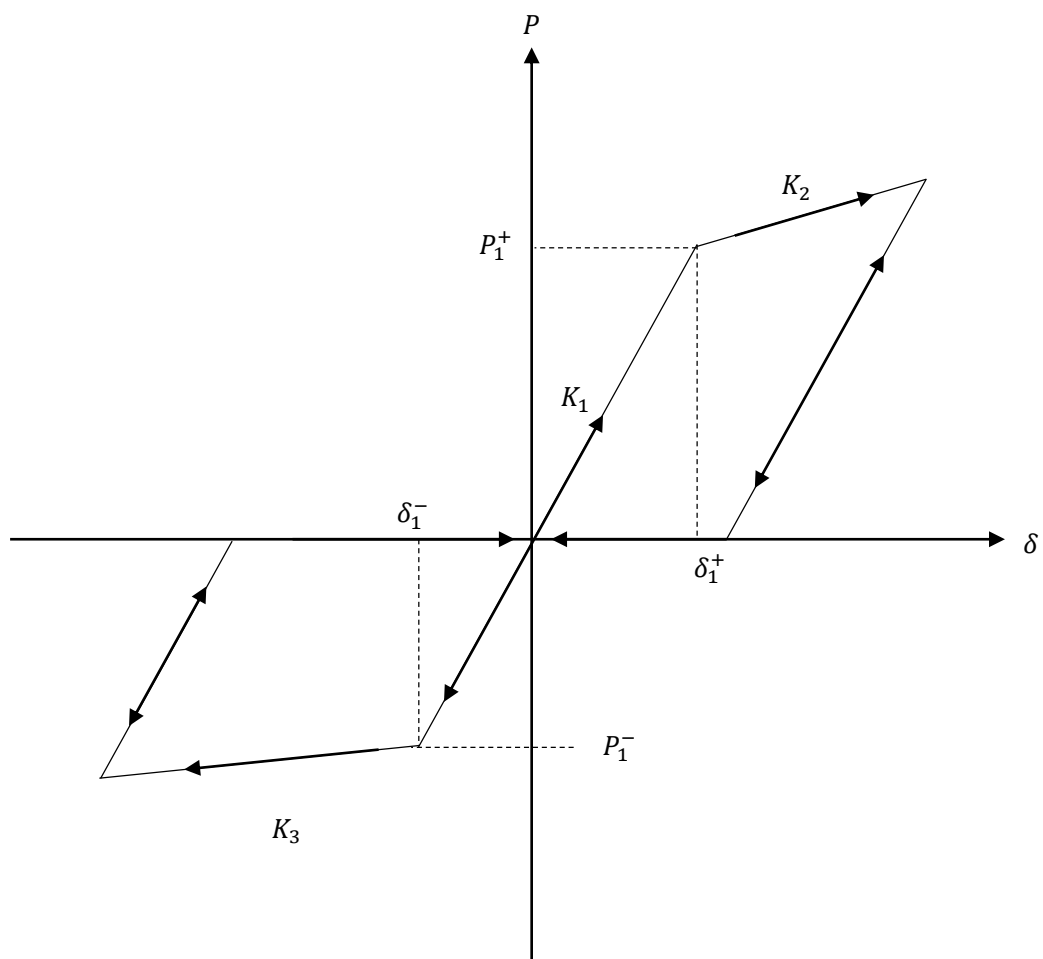
骨格曲線は下図のようになり，履歴曲線は描かずに骨格曲線上を動きます．



7.3. バイリニア（非対称ループ）

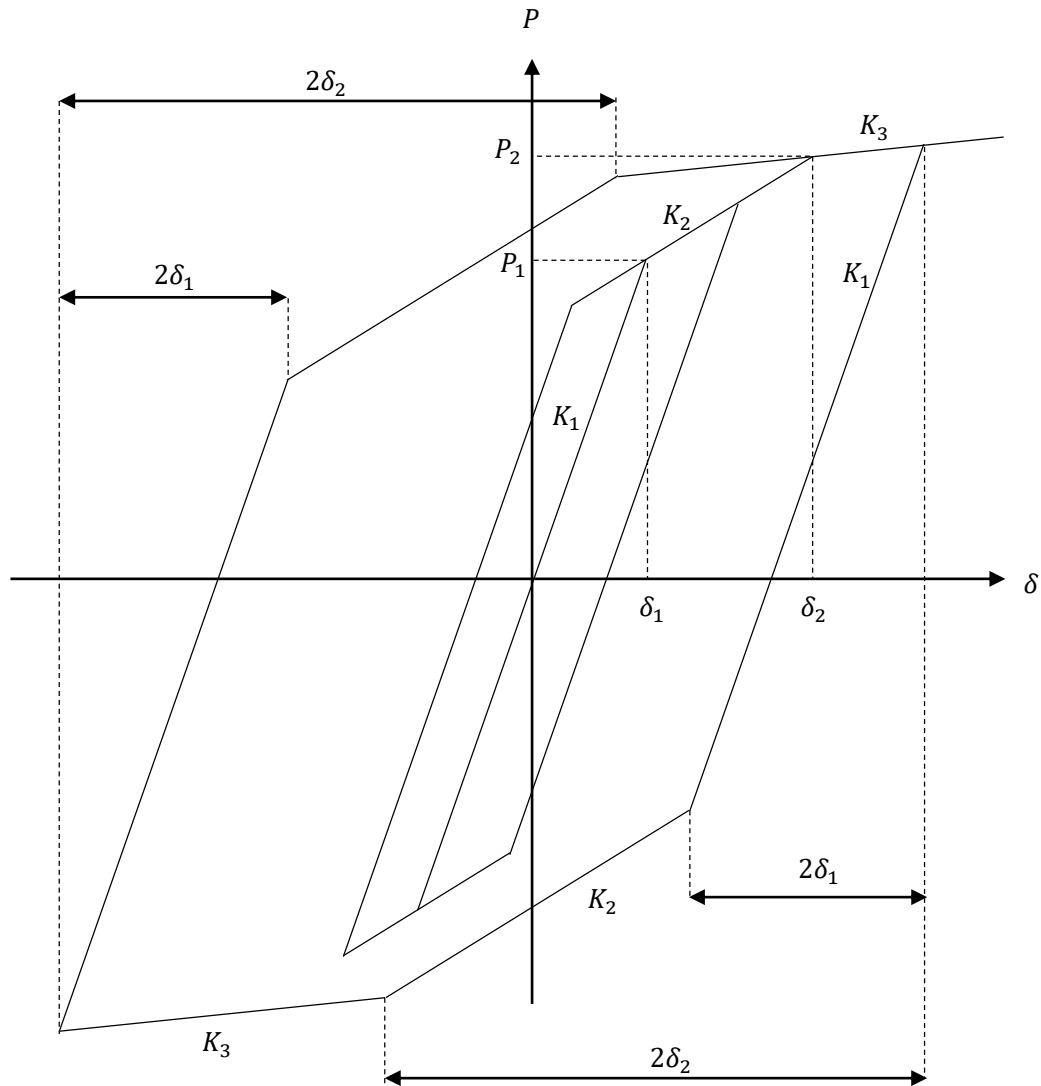


7. 4. バイリニア（非対称スリップ）

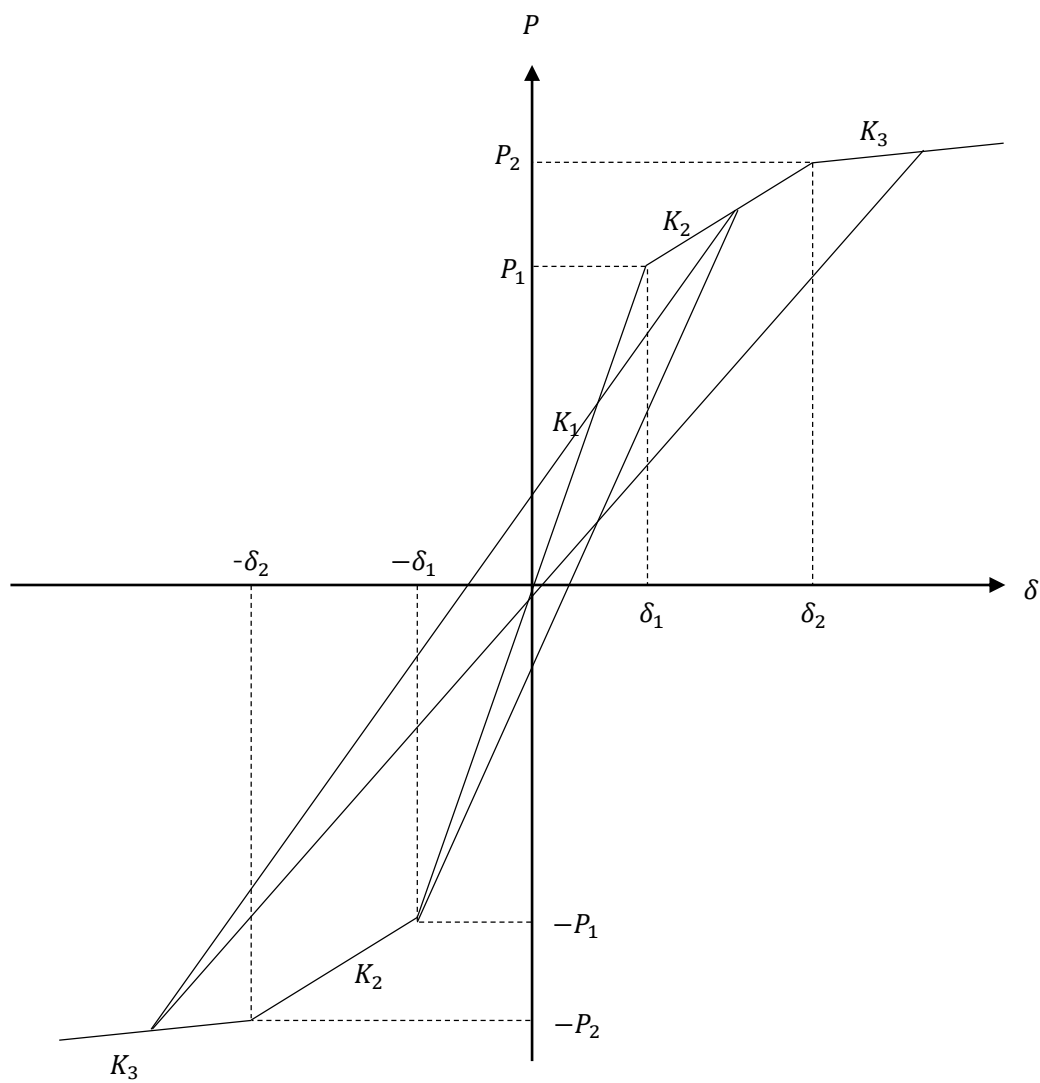


7.5. トリリニア（標準型）

骨格曲線がトリリニアで Masing の規則に従います.



7.6. トリリニア（最大点指向型）



7.7. トリリニア（原点指向型）

骨格曲線はトリリニアです.

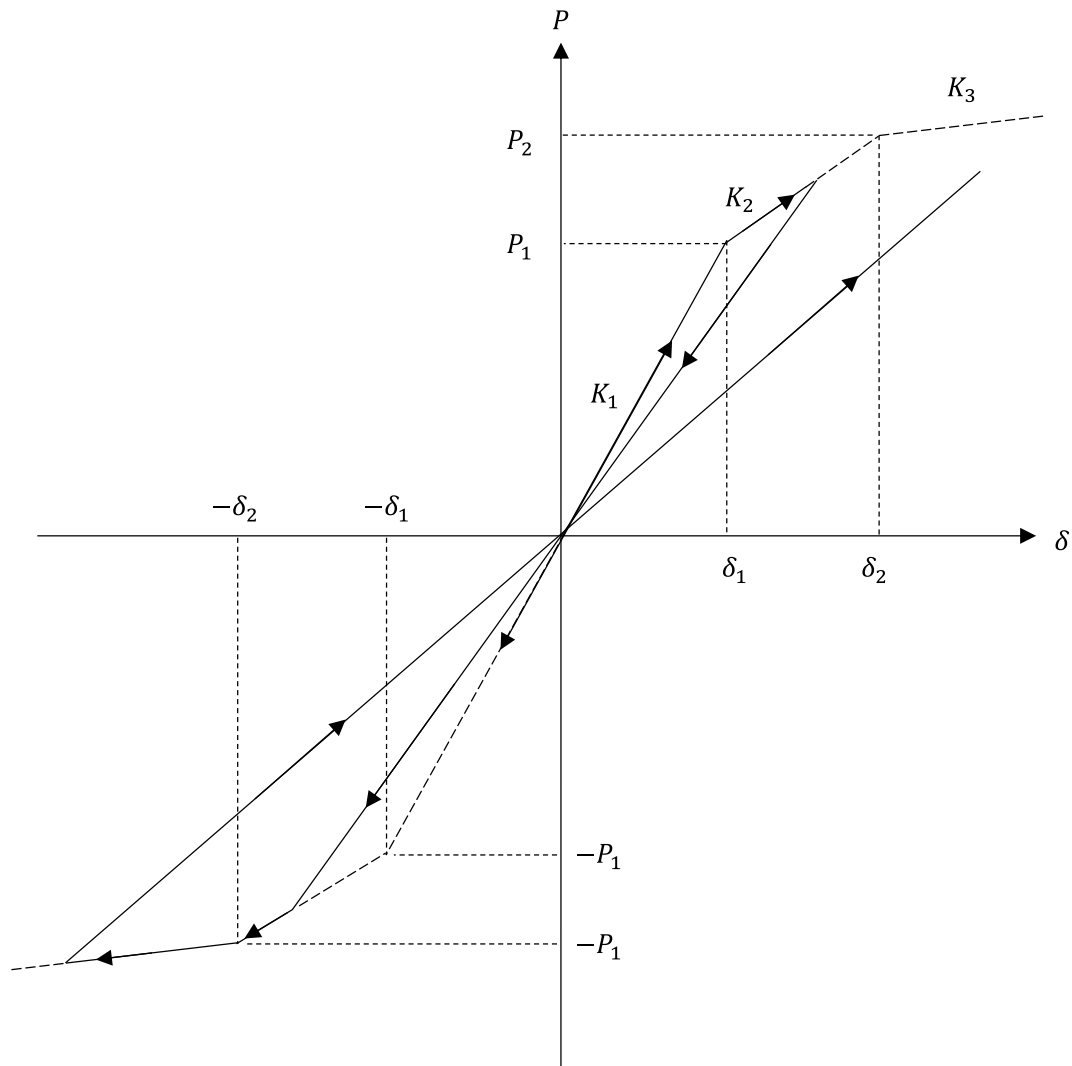
履歴ルールは以下のようになります.

- ① $|\delta_{max}| < \delta_1$ の場合, 原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます.
- ② δ が δ_1 を超えた場合は骨格曲線上の第 2 勾配 K_2 の直線上を, δ が δ_2 を超えた場合は骨格曲線上の第 3 勾配 K_3 の直線上を進みます.

この直線から戻って反対方向に進む場合は, 原点を目指します.

原点を目指す直線から戻って反対方向に進む場合は, 同じ直線上を戻ります.

- ③ 復元力 0 を超えると勾配は変化せず, 反対側の $|\delta_{max}|$ を目指します.
- ④ $|\delta_{max}|$ を超えると, 直線は骨格曲線上を進みます.



7.8. トリリニア（原点・最大点指向型）

骨格曲線はトリリニアです。

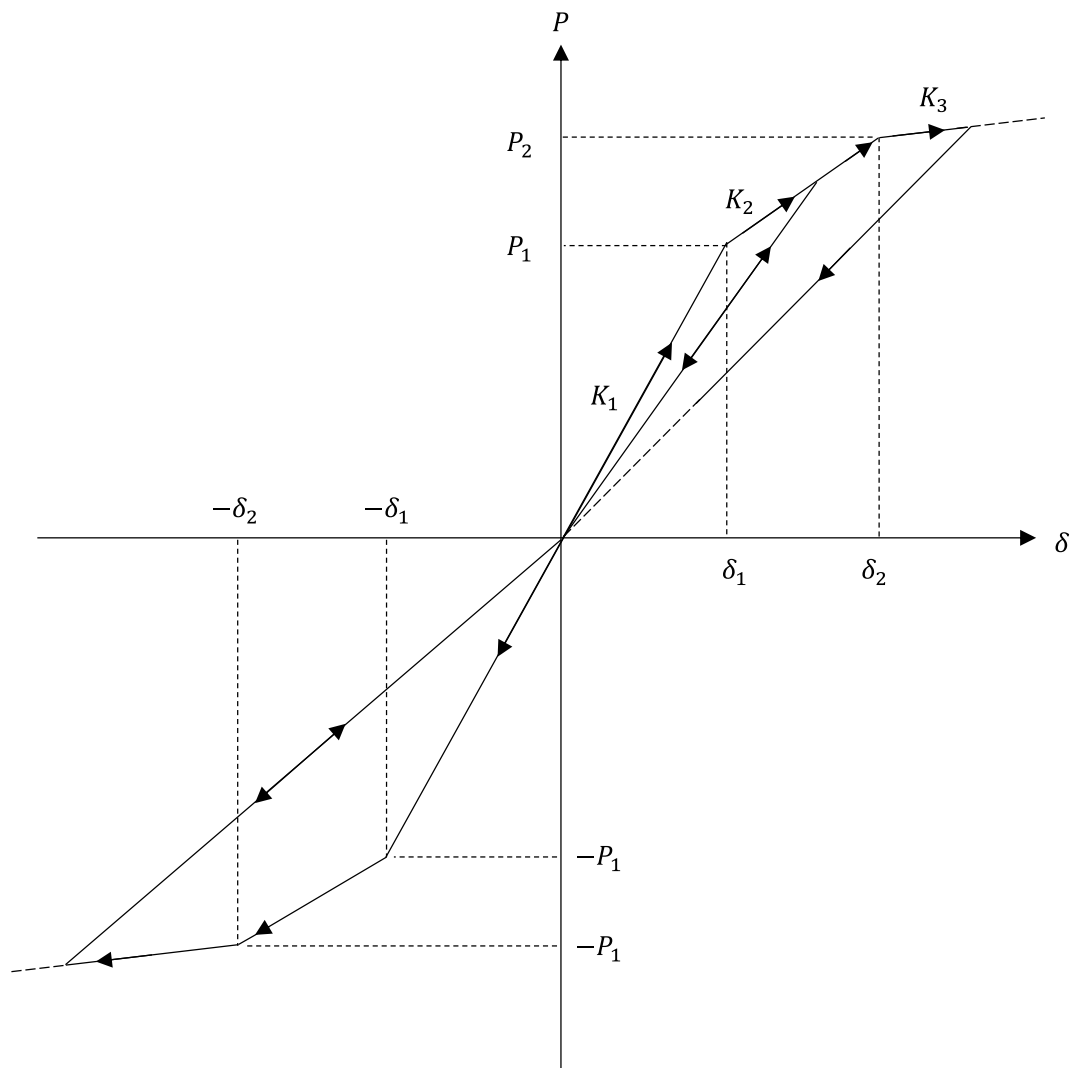
履歴ルールは以下のようになります。

- ① $|\delta_{max}| < \delta_1$ の場合，原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます。
- ② δ が δ_1 を超えた場合は骨格曲線上の第 2 勾配 K_2 の直線上を， δ が δ_2 を超えた場合は骨格曲線上の第 3 勾配 K_3 の直線上を進みます。

この直線から戻って反対方向に進む場合は，原点を目指します。

原点を目指す直線から戻って反対方向に進む場合は，同じ直線上を戻ります。

- ③ 復元力 0 を超えると，直線は反対側の最大変形点 δ_{max} を目指します。
- ④ 反対側の最大変形点 δ_{max} を超えると，骨格曲線上を進みます。



7.9. トリリニア（原点指向・鉄道標準型）

骨格曲線はトリリニアです。

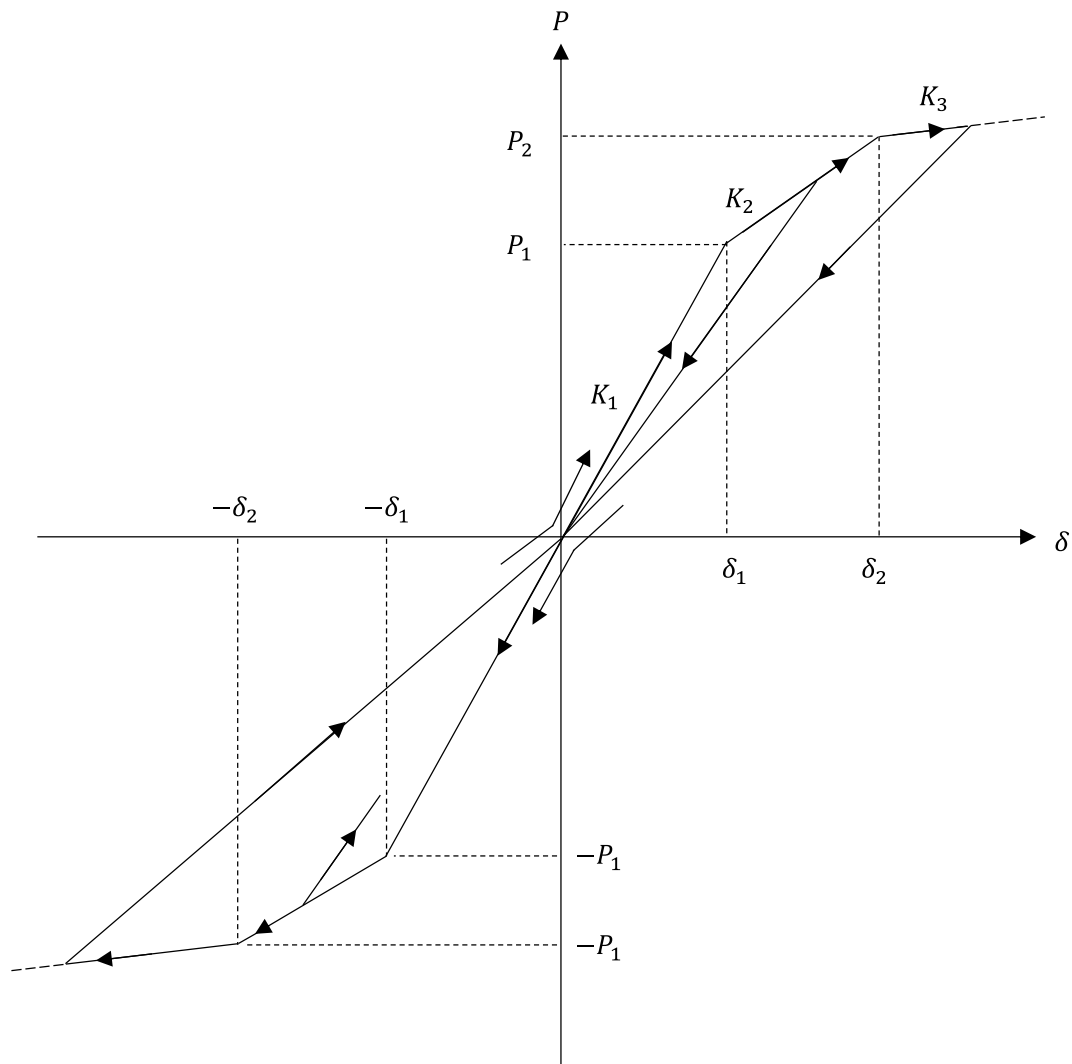
履歴ルールは以下のようになります。

- ① $|\delta_{max}| < \delta_1$ の場合，原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます。
- ② δ が δ_1 を超えた場合は骨格曲線上の第 2 勾配 K_2 の直線上を， δ が δ_2 を超えた場合は骨格曲線上の第 3 勾配 K_3 の直線上を進みます。

この直線から戻って反対方向に進む場合は，原点を目指します。

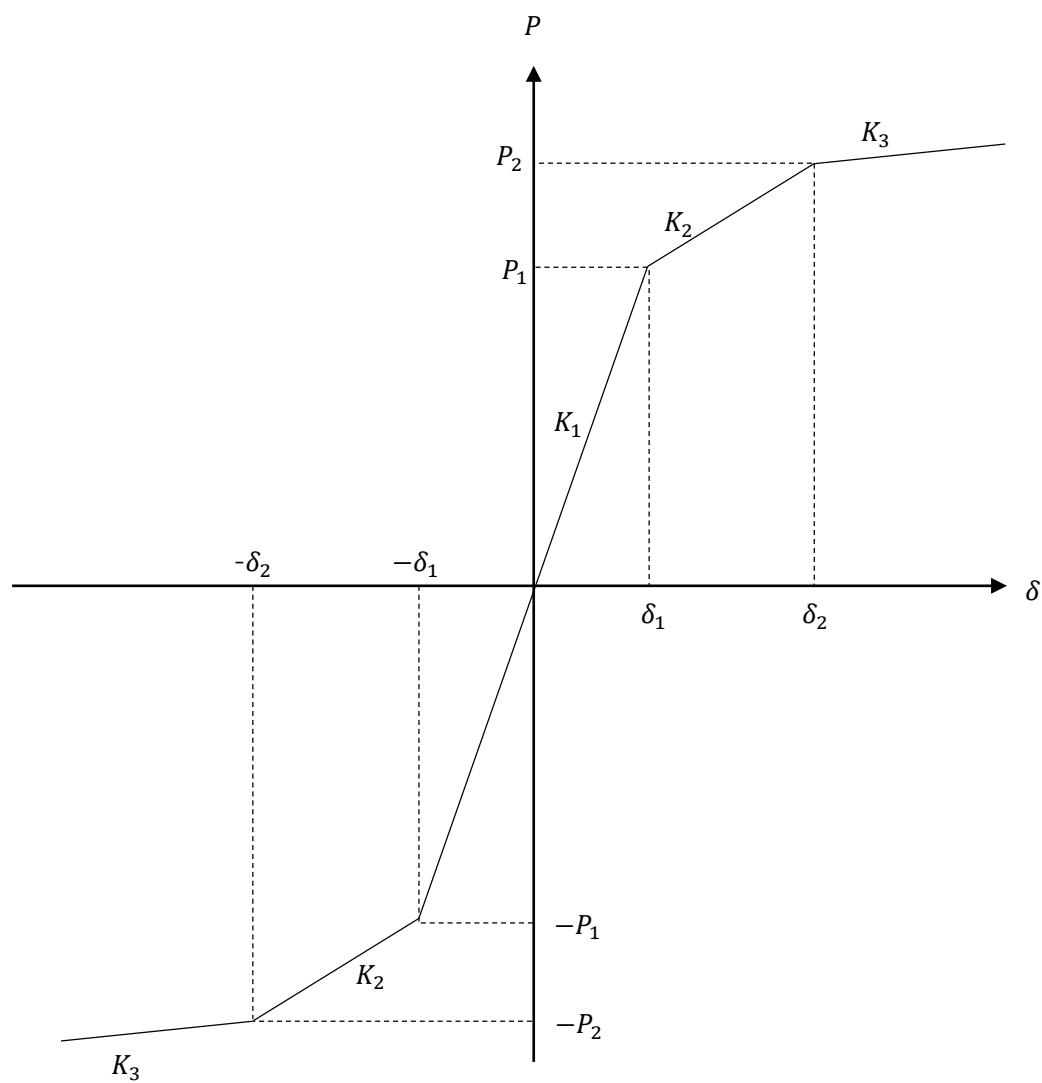
原点を目指す直線から戻って反対方向に進む場合は，同じ直線上を戻ります。

- ③ 復元力 0 を超えると，直線は反対側の第一折れ点 δ_1 を目指し，骨格曲線上を動きます。



7. 10. トリリニア（逆行型）

骨格曲線は下図のようになり，履歴曲線は描かずに骨格曲線上を動きます．



7. 11. JR 総研剛性低減 RC 型

骨格曲線はテトラリニア型です.

履歴ルールは以下のようになります.

① $|\delta_{max}| < \delta_1$ の場合, 原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます.

② δ が δ_1 を超えた場合, 骨格曲線上の第 2 勾配 K_2 の直線上を進みます.

この直線から戻って反対方向に進む場合は, 戻り点から次式で求まる勾配 K_d の直線上を進みます. 戻り点が新しい δ_{max} および P_{max} となります.

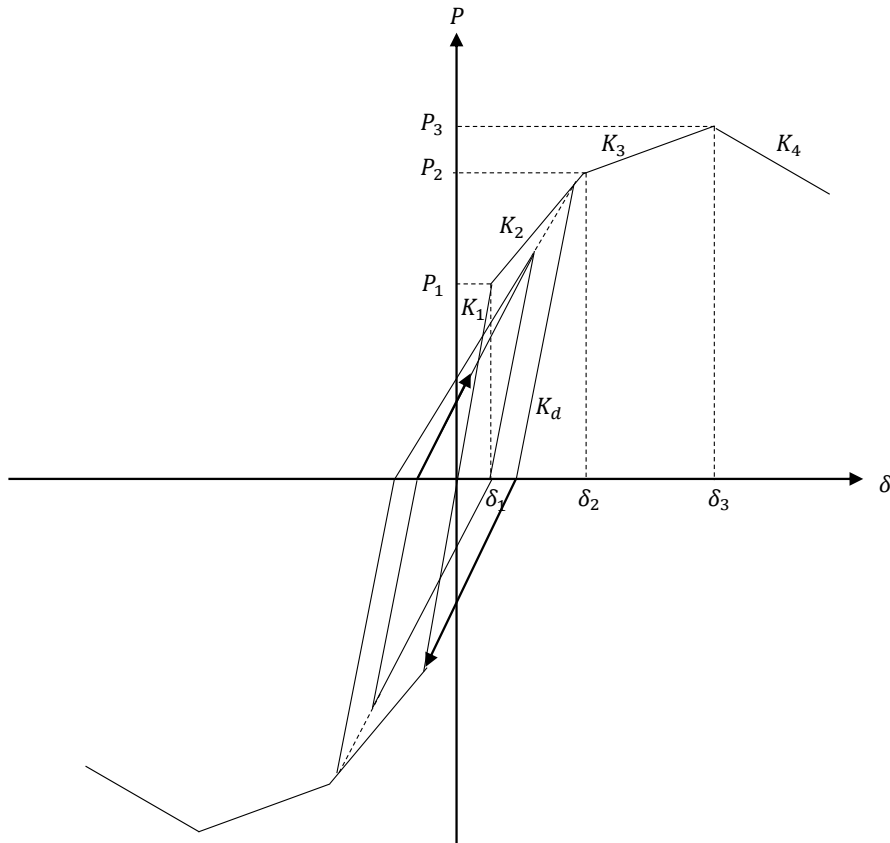
$$K_d = K_1 \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_1} \right|^{-\beta} \quad \left(\frac{P_{max} - P_1^-}{\delta_{max} - \delta_1^-} < K_d < K_1 \right) \quad (7.11.1)$$

復元力 0 の点を超えると, 最大変形点を目指します. 反対側の最大変形点が弾性域の場合は, 反対側の第 1 折れ点を目指します.

第 1 折れ点, または最大変形点を目指す直線上から戻る場合は, 上式で求まる勾配 K_d 上を進み, 復元力 0 を超えると反対側の最大変形点を目指します. この時の δ が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります.

最大変形点を目指す直線上から戻る場合は, 上式で求まる勾配 K_d 上を進み, 復元力 0 を超えると反対側の $\delta_{max,i}$ を目指します. この時の δ が内部ループの最大変形点 $\delta_{max,i}$ となります. $\delta_{max,i}$ を超えると, 反対側の最大変形点を目指します.

最大変形点を超えた場合は, 骨格曲線上の第 2 勾配 K_2 の直線上を進みます.



③ δ が δ_2 を超えた場合、骨格曲線上の第3 勾配 K_3 の直線上を進みます。

この直線から戻って反対方向に進む場合は、戻り点から次式で求まる勾配 K_d の直線上を進みます。戻り点の δ が新しい δ_{max} になります。

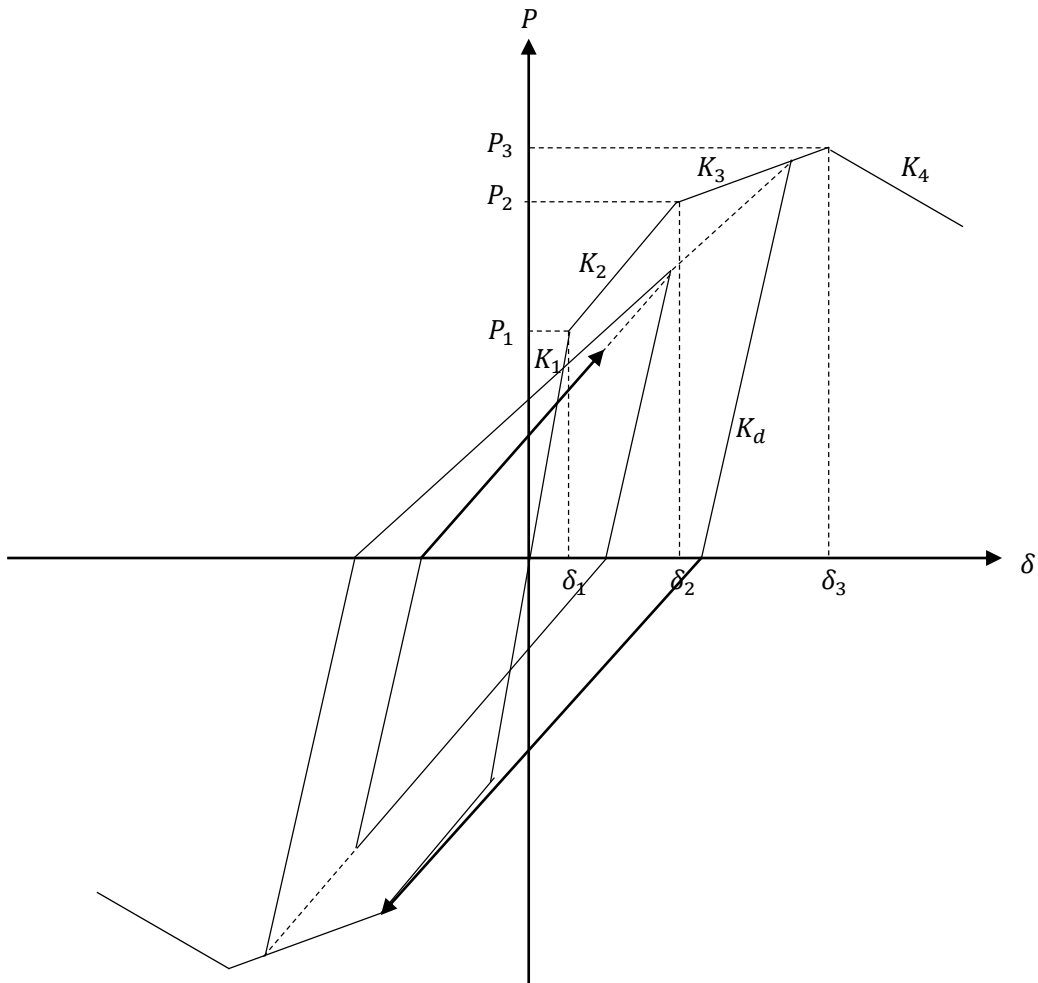
$$K_d = \frac{P_2 - P_1}{\delta_2 - \delta_1} \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_2} \right|^{-\beta} \quad (7.11.2)$$

復元力 0 の点を超えると、最大変形点を目指します。反対側の最大変形が弾性域、またはひび割れ域の場合は、反対側の第2 折れ点を目指します。

第2 折れ点、または最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大変形点を目指します。この時の戻り点が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります。

最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大 $\delta_{max,i}$ を目指します。 $\delta_{max,i}$ を超えると反対側の最大変形点を目指します。

最大変形点を超えた場合は、骨格曲線上の第3 勾配 K_3 の直線上を進みます。



- ④ δ が δ_3 を超えた場合、骨格曲線上の第4 勾配 K_4 の直線上を進みます。

この直線から戻って反対方向に進む場合は、戻り点から次式で求まる勾配 K_d の直線上を進みます。戻り点の δ が新しい δ_{max} になります。

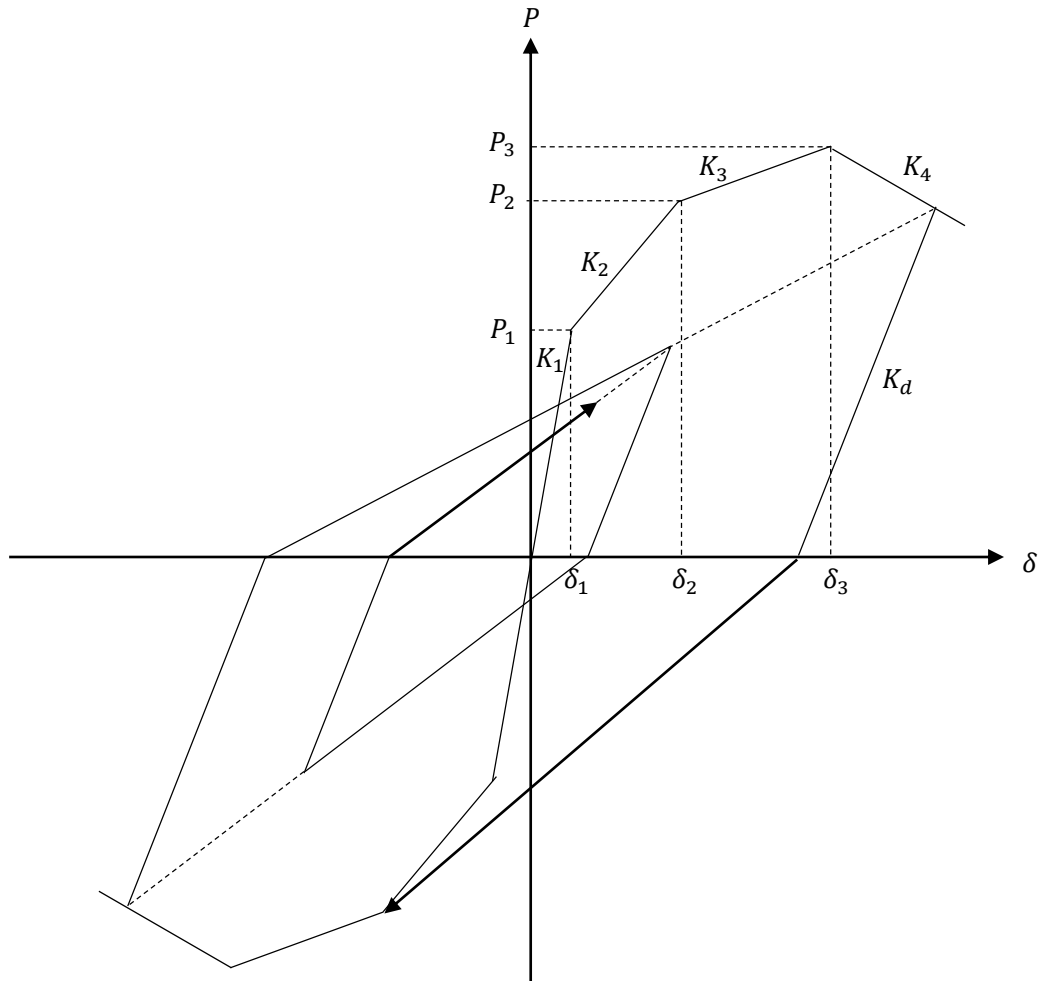
$$K_d = \frac{P_2 - P_1}{\delta_2 - \delta_1} \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_2} \right|^{-\beta} \quad (7.11.3)$$

復元力 0 の点を超えると、最大変形点を目指します。反対側の最大変形が弾性域、またはひび割れ域の場合は、反対側の第2 折れ点を目指します。

第2 折れ点、または最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大変形点を目指します。この時の戻り点が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります。

最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大 $\delta_{max,i}$ を目指します。 $\delta_{max,i}$ を超えると反対側の最大変形点を目指します。

最大変形点を超えた場合は、骨格曲線上の第4 勾配 K_4 の直線上を進みます。



7.12. ペンタリニア（JR 内巻きスパイラル型）

骨格曲線はペンタリニアです．

履歴ルールは以下のようになります．

- ① $|\delta_{max}| < \delta_1$ の場合，原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます．
- ② δ が δ_1 を超えた場合，骨格曲線上の第 2 勾配 K_2 の直線上を進みます．

この直線から戻って反対方向に進む場合は，戻り点から次式で求まる勾配 K_d の直線上を進みます．戻り点が新しい δ_{max} および P_{max} となります．

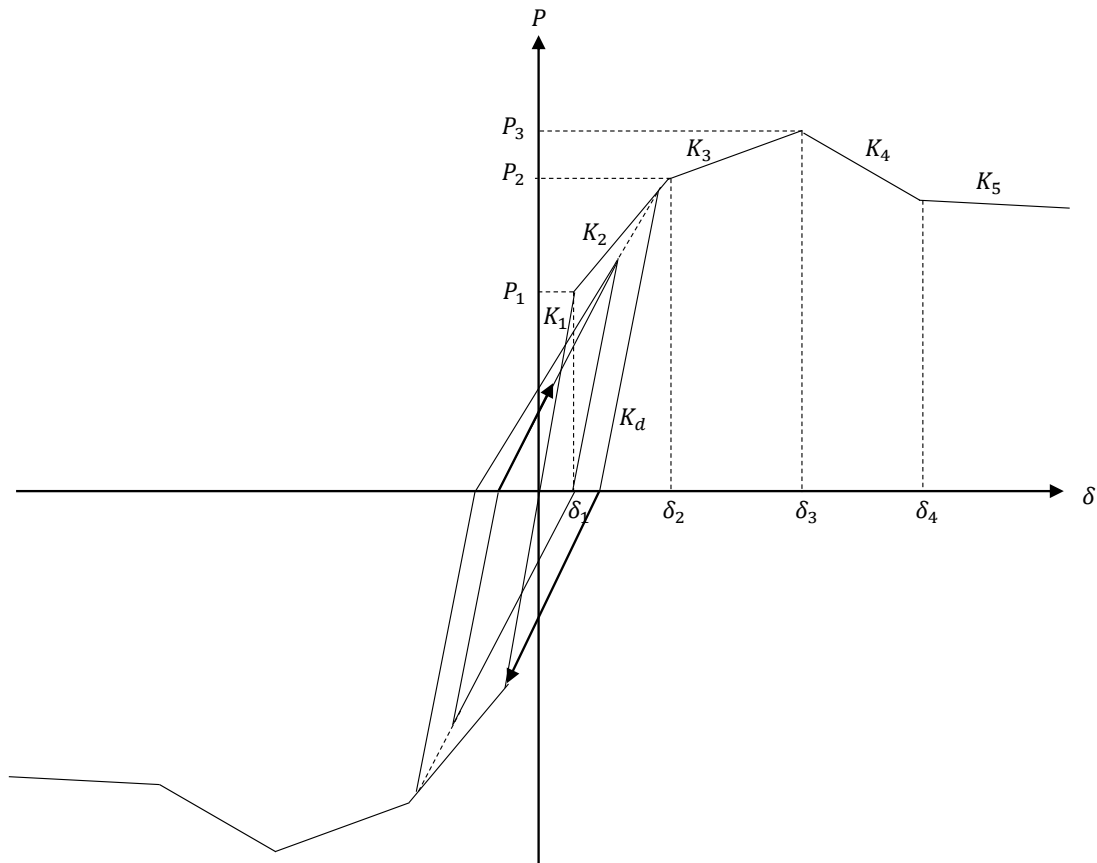
$$K_d = K_1 \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_1} \right|^{-\alpha} \quad \left(\frac{P_{max} - P_1^-}{\delta_{max} - \delta_1^-} < K_d < K_1 \right) \quad (7.12.1)$$

復元力 0 の点を超えると，最大変形点を目指します．反対側の最大変形点が弾性域の場合は，反対側の第 1 折れ点を目指します．

第 1 折れ点，または最大変形点を目指す直線上から戻る場合は，上式で求まる勾配 K_d 上を進み，復元力 0 を超えると反対側の最大変形点を目指します．この時の δ が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります．

最大変形点を目指す直線上から戻る場合は，上式で求まる勾配 K_d 上を進み，復元力 0 を超えると反対側の $\delta_{max,i}$ を目指します．この時の δ が内部ループの最大変形点 $\delta_{max,i}$ となります． $\delta_{max,i}$ を超えると，反対側の最大変形点を目指します．

最大変形点を超えた場合は，骨格曲線上の第 2 勾配 K_2 の直線上を進みます．



③ δ が δ_2 を超えた場合、骨格曲線上の第3 勾配 K_3 の直線上を進みます。

この直線から戻って反対方向に進む場合は、戻り点から次式で求まる勾配 K_d の直線上を進みます。戻り点の δ が新しい δ_{max} になります。

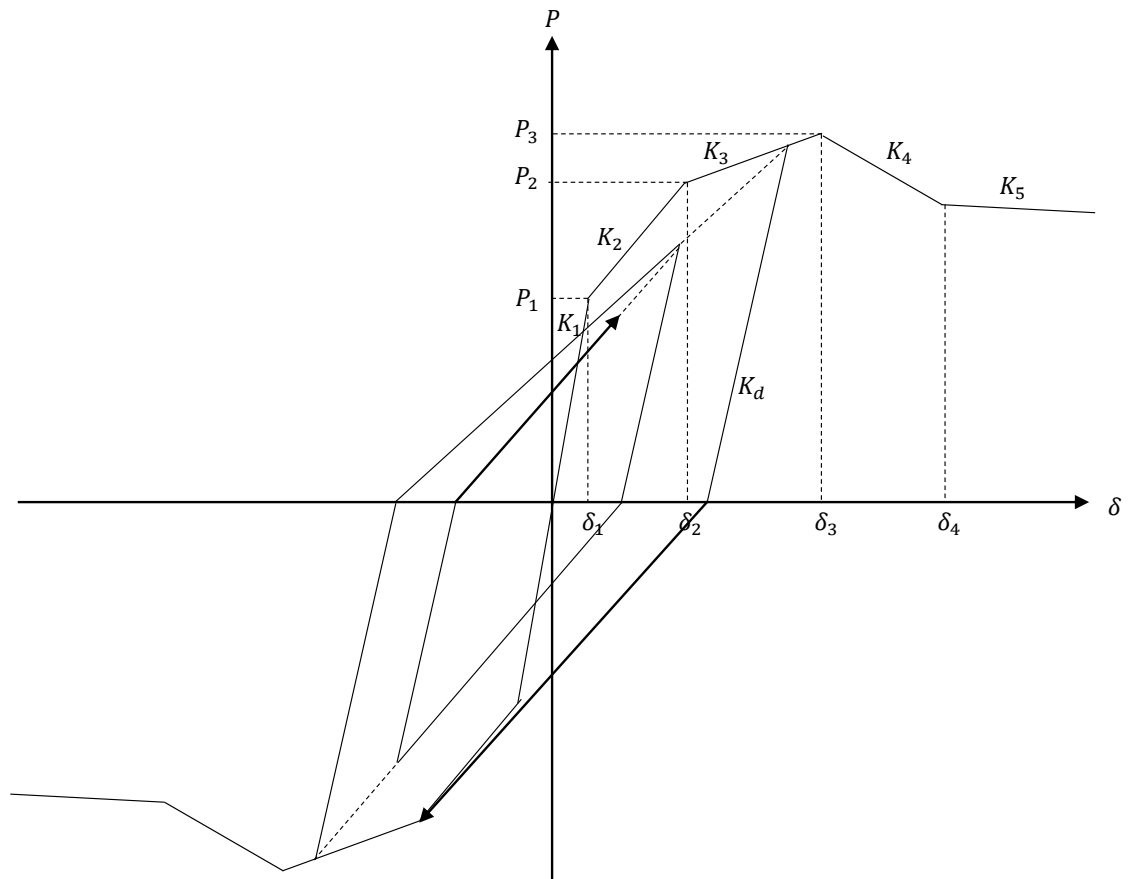
$$K_d = \frac{P_2 - P_1}{\delta_2 - \delta_1} \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_2} \right|^{-\alpha} \quad (7.12.2)$$

復元力 0 の点を超えると、最大変形点を目指します。反対側の最大変形が弾性域、またはひび割れ域の場合は、反対側の第2 折れ点を目指します。

第2 折れ点、または最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大変形点を目指します。この時の戻り点が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります。

最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大 $\delta_{max,i}$ を目指します。 $\delta_{max,i}$ を超えると反対側の最大変形点を目指します。

最大変形点を超えた場合は、骨格曲線上の第3 勾配 K_3 の直線上を進みます。



- ④ δ が δ_3 を超えた場合、骨格曲線上の第4 勾配 K_4 の直線上を進みます。

この直線から戻って反対方向に進む場合は、戻り点から次式で求まる勾配 K_d の直線上を進みます。戻り点の δ が新しい δ_{max} になります。

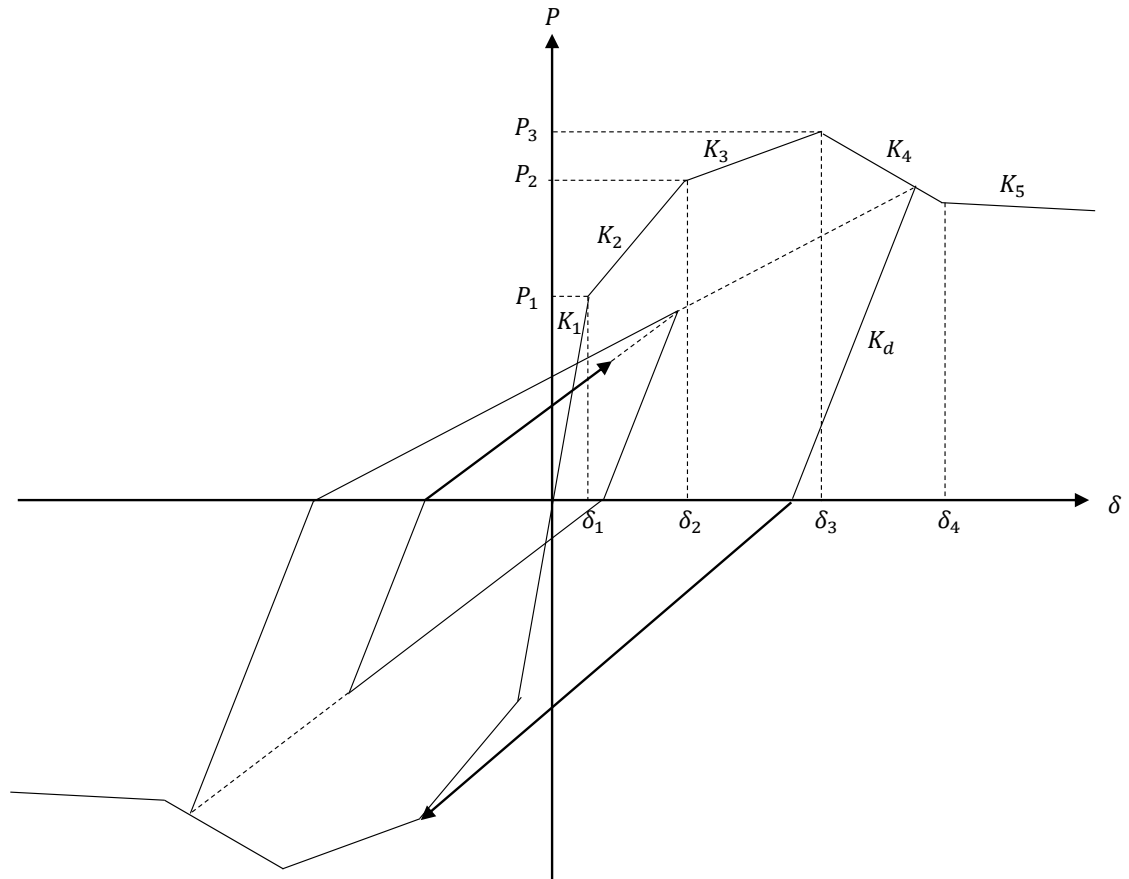
$$K_d = \frac{P_2 - P_1}{\delta_2 - \delta_1} \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_2} \right|^{-\alpha} \quad (7.12.3)$$

復元力 0 の点を超えると、最大変形点を目指します。反対側の最大変形が弾性域、またはひび割れ域の場合は、反対側の第2 折れ点を目指します。

第2 折れ点、または最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大変形点を目指します。この時の戻り点が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります。

最大変形点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大 $\delta_{max,i}$ を目指します。 $\delta_{max,i}$ を超えると反対側の最大変形点を目指します。

最大変形点を超えた場合は、骨格曲線上の第4 勾配 K_4 の直線上を進みます。



- ⑤ δ が δ_4 を超えた場合、骨格曲線上の第5 勾配 K_5 の直線上を進みます。

この直線から戻って反対方向に進む場合は、戻り点から次式で求まる勾配 K_d の直線上を進みます。戻り点の δ が新しい δ_{max} になります。

$$K_d = \frac{P_2 - P_1^-}{\delta_2 - \delta_1^-} \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_2} \right|^{-\alpha} \quad (7.12.4)$$

復元力 0 の点を超えると、最大変形点を目指します。反対側の最大変形が弾性域、またはひび割れ域の場合は、反対側の第2 折れ点を目指します。反対側の最大変形が L 点を超えている場合は次式で求まる勾配 K_s の直線上を進み、立ち上がり開始点を目指します。

$$K_s = \frac{P_{max}}{\delta_{max} - \delta_0} \left| \frac{\delta_{max}}{\delta_{max} - \delta_0} \right|^{-\beta} \quad (7.12.5)$$

立ち上がり開始点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の立ち上がり開始点を目指します。この時の戻り点が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります。

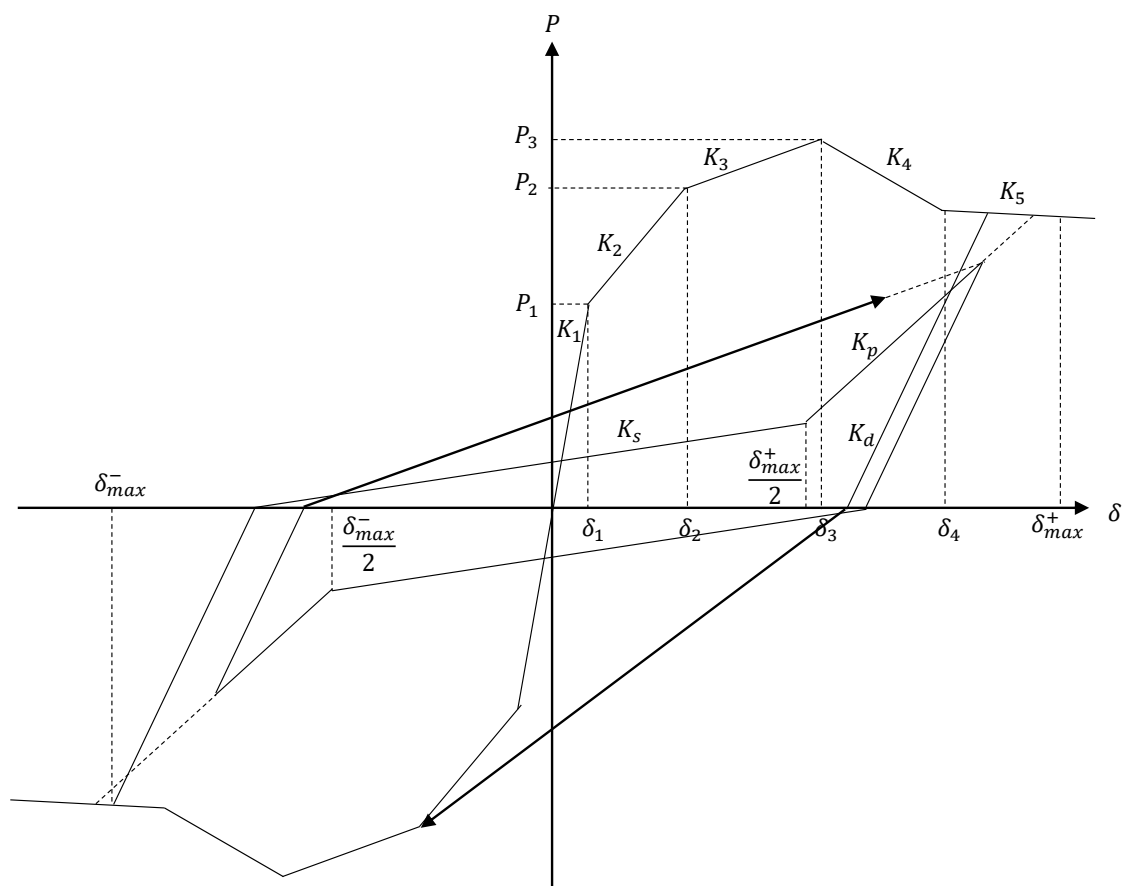
立ち上がり開始点を目指す直線上から戻る場合は、上式で求まる勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると反対側の最大 $\delta_{max,i}$ を目指します。 $\delta_{max,i}$ を超えると反対側の立ち上がり開始点を目指します。

立ち上がり開始点を超えた場合は、次式で求まる勾配 K_p の直線上を進み、骨格曲線を目指します。

$$K_p = \gamma \frac{P_{max}}{\delta_{max}} \quad \left(K_p < \frac{P_{max} - P_s}{\delta_{max} - \delta_s} \right) \quad (7.12.6)$$

骨格曲線を目指す直線上から戻る場合は、勾配 K_d 上を進み、復元力 0 を超えると上式で求まる勾配 K_s の直線上を進み、反対側の立ち上がり開始点を目指します。この時の戻り点が内部ループの最大変形 $\delta_{max,i}$ となります。

立ち上がり剛性 K_p で進み、骨格曲線に到達したら、骨格曲線上の第5 勾配 K_5 の直線上を進みます。



参考文献

- 1) 井口重信, 山田章史, 中村瑞穂, 築嶋大輔: 軸方向鉄筋の内側に円形帯鉄筋を配置した鉄筋コンクリート柱部材における履歴モデルに関する一考察, コンクリート工学年次論文集, Vol. 36, No. 2, 2014.

7. 13. 履歴関数型・双曲線

骨格曲線は以下の関数¹⁾で示されます。

$$P = \frac{K_0 \cdot \delta}{1 + \left| \frac{\delta}{\delta_r} \right|} \quad (7.13.1)$$

履歴ルールは Masing の規則に従い、以下の関数で示されます。

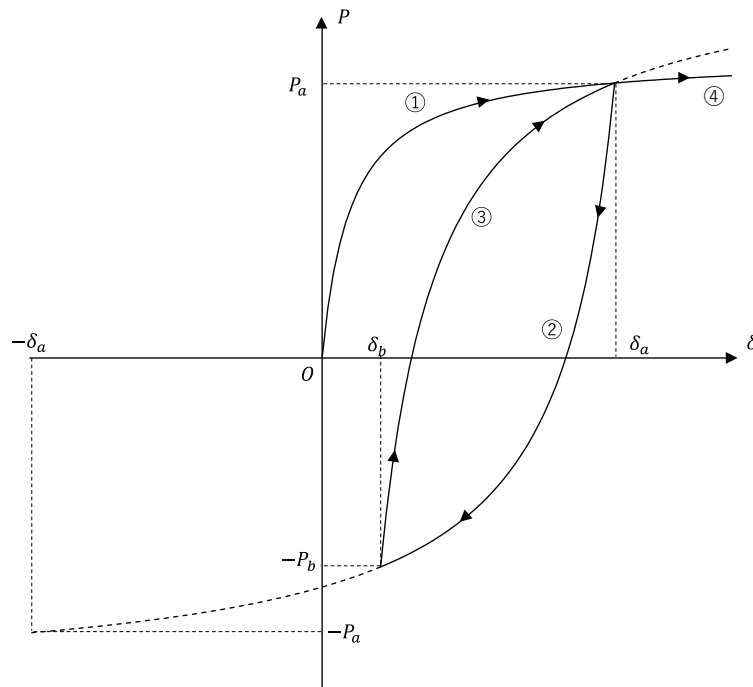
$$\frac{P - P_a}{2} = f\left(\frac{\delta - \delta_a}{2}\right) \quad (7.13.2)$$

$$P - P_a = \frac{K_0 \cdot (\delta - \delta_a)}{1 + \left| \frac{\delta - \delta_a}{2\delta_r} \right|} \quad (7.13.3)$$

ここで、 K_0 ：初期剛性

δ_r ：規準変位

- ① δ が折り返すまでは、式(7.13.1)で示す骨格曲線上を進みます。
- ② δ が折り返し始めると、折り返し点を (δ_a, P_a) とした式(7.13.2)で示す履歴曲線上を進みます。
- ③ δ が再度折り返すと折り返し点を (δ_b, P_b) とした式(7.13.2)で示す履歴曲線上を進みます。
- ④ 履歴曲線が初期の折り返し点 (δ_a, P_a) に達すると、それ以降は骨格曲線上を進みます。



参考文献

- 1) Konder, R.L : Hyperbolic Stress-Strain Response; Cohesive Soils, Proc. ASCE, SM1, pp.115-143, 1963.

7. 14. 履歴関数型・R0 (Ramberg-Osgood モデル)

骨格曲線は以下の関数¹⁾で示されます.

$$\delta = \frac{P}{K_0} \left\{ 1 + \alpha \left| \frac{P}{P_y} \right|^{\beta-1} \right\} \quad (7.14.1)$$

履歴ルールは Masing の規則に従い, 以下の関数で示されます.

$$\delta - \delta_a = \frac{P - P_a}{K_0} \left\{ 1 + \alpha \left| \frac{P - P_a}{2P_y} \right|^{\beta-1} \right\} \quad (7.14.2)$$

ここで, K_0 : 初期剛性

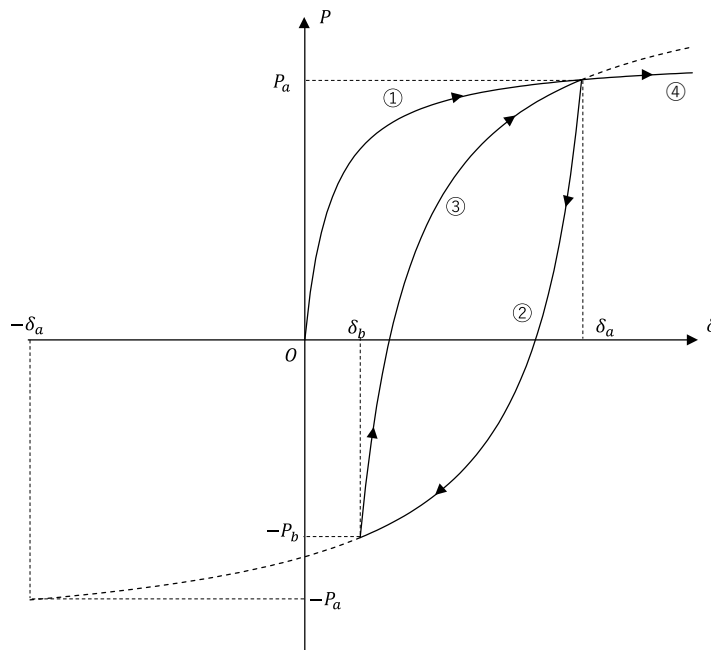
α, β, P_y : RO モデルのパラメータ, ($P_y = K_0 \cdot \delta_r$)

δ_r : 規準変位

$\alpha = 2^{\beta-1}$

$\beta = \frac{2+\pi h_{max}}{2-\pi h_{max}}$ (h_{max} : 最大減衰定数)

- ① δ が折り返すまでは, 式(7.14.1)で示す骨格曲線上を進みます.
- ② δ が折り返し始めると, 折り返し点を(δ_a, P_a)とした式(7.14.2)で示す履歴曲線上を進みます.
- ③ δ が再度折り返すと折り返し点を(δ_b, P_b)とした式(7.14.2)で示す履歴曲線上を進みます.
- ④ 履歴曲線が初期の折り返し点(δ_a, P_a)に達すると, それ以降は骨格曲線上を進みます.



参考文献

- 1) Jennings, P.C : Periodic Response of a General Yielding Structure, Proc. ASCE, EM2, pp.131-163, 1964.

7.15. 履歴関数型・修正 GHE モデル

骨格曲線は以下の関数¹⁾で示されます。

$$P = \frac{K_0 \cdot \delta}{\frac{1}{C_1(\delta)} + \frac{1}{C_2(\delta)} \left| \frac{\delta}{\delta_r} \right|} \quad (7.15.1)$$

ここで, K_0 : 初期剛性

δ_r : 規準変位

また, $C_1(\delta)$ および $C_2(\delta)$ は骨格曲線の補正係数であり, 以下の式で表されます。

$$C_1(\delta) = \frac{C_1(0) + C_1(\infty)}{2} + \frac{C_1(0) - C_1(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\alpha}{|\delta/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.15.2)$$

$$C_2(\delta) = \frac{C_2(0) + C_2(\infty)}{2} + \frac{C_2(0) - C_2(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\beta}{|\delta/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.15.3)$$

ここで, $C_1(0)$, $C_1(\infty)$, $C_2(0)$, $C_2(\infty)$, α , β : 修正 GHE モデルのパラメータ

履歴曲線は以下の関数²⁾で示されます。

$$P - P_a = K_0(\delta'_a) \cdot \frac{\delta - \delta_a}{\frac{1}{C_1(\delta)} + \frac{1}{C_2(\delta)} \left| \frac{\delta - \delta_a}{2\delta'_a} \right|} \quad (7.15.4)$$

ここで, δ_a : 骨格曲線上または履歴曲線上から除荷（再載荷）された時の変位

P_a : 骨格曲線上または履歴曲線上から除荷（再載荷）された時の力

δ'_a : 骨格曲線上から除荷または再載荷された時の変位

また, $C_1(\delta)$ および $C_2(\delta)$ は履歴曲線の補正係数であり, 以下の式で表されます。

$$C_1(\delta) = \frac{C_1(0) + C_1(\infty)}{2} + \frac{C_1(0) - C_1(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\alpha}{|(\delta - \delta_a)/2\delta'_a|} + 1} \right\} \quad (7.15.5)$$

$$C_2(\delta) = \frac{C_2(0) + C_2(\infty)}{2} + \frac{C_2(0) - C_2(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\beta}{|(\delta - \delta_a)/2\delta'_a|} + 1} \right\} \quad (7.15.6)$$

ここで, $K_0(\delta'_a)$ は除荷時の接線剛性を示します。なお, 数値計算上では, 骨格曲線から折り返した時の履歴ループの面積から求まる履歴減衰定数 h と, 土の繰返し載荷試験の h - γ 関係から得られる減衰定数 h_a が一致するように $K_0(\delta'_a)$ を決定します。

(※本プログラムでは, ばね要素で履歴曲線を定義するため, h - δ 関係となります)

また， $h\sim\delta$ 関係から得られる減衰定数 h_a は以下の式より算出します．

$$h_a = h_{max} \cdot \left(1 - \frac{K}{K_0}\right)^\kappa \quad (7.15.7)$$

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\frac{1}{C_1(\delta'_a)} + \frac{1}{C_2(\delta'_a)} \left| \frac{\delta'_a}{\delta_r} \right|} \quad (7.15.8)$$

式(7.15.8)の補正係数 $C_1(\delta'_a)$ および $C_2(\delta'_a)$ は以下の式より算出します．

$$C_1(\delta'_a) = \frac{C_1(0) + C_1(\infty)}{2} + \frac{C_1(0) - C_1(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\alpha}{|\delta'_a/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.15.9)$$

$$C_2(\delta'_a) = \frac{C_2(0) + C_2(\infty)}{2} + \frac{C_2(0) - C_2(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\beta}{|\delta'_a/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.15.10)$$

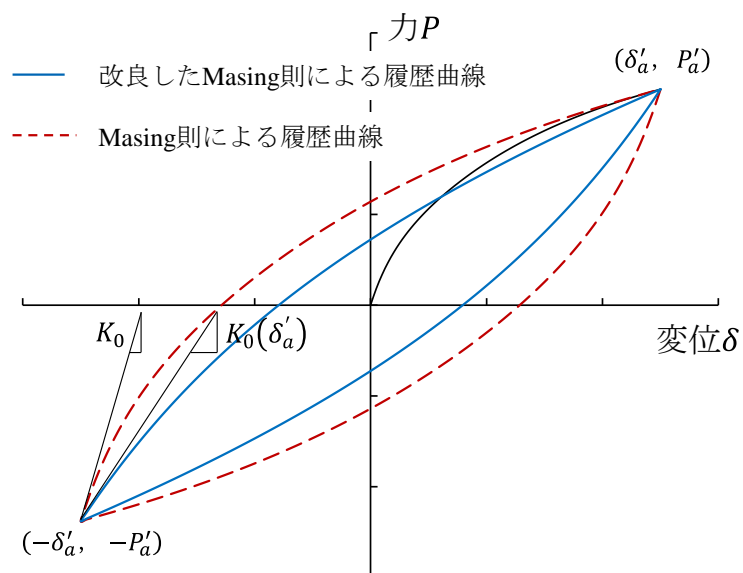
骨格曲線上からの除荷点または再載荷点 (δ'_a , P'_a) では，除荷時の接線剛性 $K_0(\delta'_a)$ を適用するため，それに伴い規準変位も修正する必要があります．(δ_r から δ'_r に修正)

修正した規準変位 δ'_r は，次の関係式から算出します．

$$P'_a = \frac{K_0(\delta'_a) \cdot \delta'_a}{\frac{1}{C_1(\delta)} + \frac{1}{C_2(\delta)} \left| \frac{\delta'_a}{\delta_r} \right|} \quad (7.15.11)$$

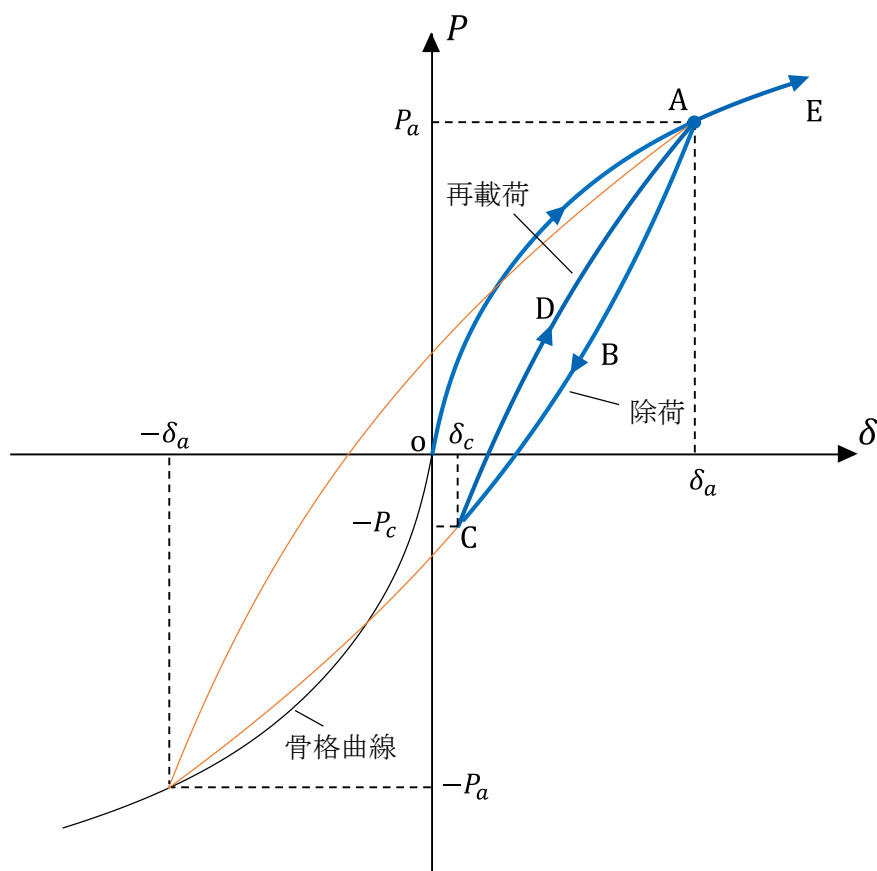
なお，再度，骨格曲線上で除荷または載荷が起こる場合のみ， $K_0(\delta'_a)$ および δ'_r の更新を行います．

ここで、 $K_0(\delta'_a)$ を用いて改良した Masing 則による履歴曲線を以下に示します。 $K_0(\delta'_a) = K_0$ の場合に限り、通常の Masing 則と同様の履歴曲線を描きます。



履歴ルールは以下のようになります。

- ① δ が折り返すまでは，式(7.15.1)で示す骨格曲線上を進みます．(O→A)
- ② δ が点 A で除荷されると，折り返し点を(δ_a, P_a)とした式(7.15.4)で示す履歴曲線上を進みます．(A→B→C)
- ③ δ が点 C で再載荷されると，折り返し点を($\delta_c, -P_c$)とした式(7.15.4)で示す履歴曲線上を進みます．(C→D→A)
- ④ 履歴曲線が初期の折り返し点(δ_a, P_a)に達すると，除荷以前に進行していた骨格曲線上を進みます．(A→E)



参考文献

- 1) Tatsuoka, F. and Shibuya, S. : Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests, Theme Lecture 1, Proc. of Ninth Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol.2, pp.101-170, 1992.
- 2) 西村昭彦，室野剛隆：GHE モデルと簡易な履歴則を用いた土の非線形モデルの提案と実験的検証，第 25 回地震工学研究発表会講演論文集，pp.309-312，1999.

7. 16. 履歴関数型・GHE-S モデル

骨格曲線は以下の関数¹⁾で示されます。

$$P = \frac{K_0 \cdot \delta}{\frac{1}{C_1(\delta)} + \frac{1}{C_2(\delta)} \left| \frac{\delta}{\delta_r} \right|} \quad (7.16.1)$$

ここで, K_0 : 初期剛性

δ_r : 規準変位

また, $C_1(\delta)$ および $C_2(\delta)$ は骨格曲線の補正係数であり, 以下の式で表されます。

$$C_1(\delta) = \frac{C_1(0) + C_1(\infty)}{2} + \frac{C_1(0) - C_1(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\alpha}{|\delta/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.16.2)$$

$$C_2(\delta) = \frac{C_2(0) + C_2(\infty)}{2} + \frac{C_2(0) - C_2(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\beta}{|\delta/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.16.3)$$

ここで, $C_1(0)$, $C_1(\infty)$, $C_2(0)$, $C_2(\infty)$, α , β : GHE-S モデルのパラメータ

履歴曲線は以下の関数²⁾で示されます。

$$P - P_a = K_r \cdot \frac{\delta - \delta_a}{\frac{1}{C_1(\delta)} + \frac{1}{C_2(\delta)} \left| \frac{\delta - \delta_a}{\lambda(\delta) \cdot \delta'_r} \right|} \quad (7.16.4)$$

ここで, δ_a : 骨格曲線上または履歴曲線上から除荷（再載荷）された時の変位

P_a : 骨格曲線上または履歴曲線上から除荷（再載荷）された時の力

また, $C_1(\delta)$ および $C_2(\delta)$ は履歴曲線の補正係数であり, 以下の式で表されます。

$$C_1(\delta) = \frac{C_1(0) + C_1(\infty)}{2} + \frac{C_1(0) - C_1(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\alpha}{|(\delta - \delta_a)/(\lambda(\delta) \cdot \delta'_r)|} + 1} \right\} \quad (7.16.5)$$

$$C_2(\delta) = \frac{C_2(0) + C_2(\infty)}{2} + \frac{C_2(0) - C_2(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\beta}{|(\delta - \delta_a)/(\lambda(\delta) \cdot \delta'_r)|} + 1} \right\} \quad (7.16.6)$$

K_r は除荷時の接線剛性であり, 以下の吉田ら³⁾の提案式を適用します。

$$K_r = K_0 \cdot \left(\frac{1 - \frac{K_{min}}{K_{max}}}{1 + \left| \frac{\delta'_a}{\delta_{r0}} \right|} + \frac{K_{min}}{K_{max}} \right) \quad (7.16.7)$$

ここで、 δ'_a ：骨格曲線上から除荷または再載荷された時の変位

δ_{r0} ：除荷時の接線剛性用の規準変位

なお、提案式の各種パラメータは、材料ごとに下表の値が示されています。

材料	γ_{r0}	K_{min} / K_{max}
砂 ($Dr=50\%$)	0.0006	0.18
砂 ($Dr=80\%$)	0.0015	0.35
粘土	0.013	0.1

骨格曲線上からの除荷点または再載荷点 (δ'_a , P'_a) では、除荷時の接線剛性 K_r を適用するため、それに伴い規準変位も修正する必要があります。 (δ_r から δ'_r に修正)

修正した規準変位 δ'_r は、次の関係式から算出します。

$$P'_a = \frac{K_r \cdot \delta'_a}{\frac{1}{C_1(\delta)} + \frac{1}{C_2(\delta)} \left| \frac{\delta'_a}{\delta'_r} \right|} \quad (7.16.8)$$

なお、履歴曲線上で除荷または載荷が起こる場合は、 K_r および δ'_r の更新は行いません。

式(7.16.4)の履歴曲線の相似関数 $\lambda(\delta)$ は、以下の式で示されます。

$$\lambda(\delta) = \left(\frac{2 - \lambda_{min}}{\delta'^2_a} \right) \cdot \delta^2 + \lambda_{min} \quad (7.16.9)$$

ここで、 λ_{min} は相似比を意味し、 $1 \leq \lambda_{min} \leq 2$ の値を取ります。なお、数値計算上では、骨格曲線から折り返した時の履歴ループの面積から求まる履歴減衰定数 h と、土の繰返し載荷試験の $h \sim \gamma$ 関係から得られる減衰定数 h_a が一致するように λ_{min} を決定します。

(※本プログラムでは、ばね要素で履歴曲線を定義するため、 $h \sim \delta$ 関係となります)

また、 $h \sim \delta$ 関係から得られる減衰定数 h_a は以下の式より算出します。

$$h_a = h_{max} \cdot \left(1 - \frac{K}{K_0} \right)^\kappa \quad (7.16.10)$$

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1}{\frac{1}{C_1(\delta'_a)} + \frac{1}{C_2(\delta'_a)} \left| \frac{\delta'_a}{\delta'_r} \right|} \quad (7.16.11)$$

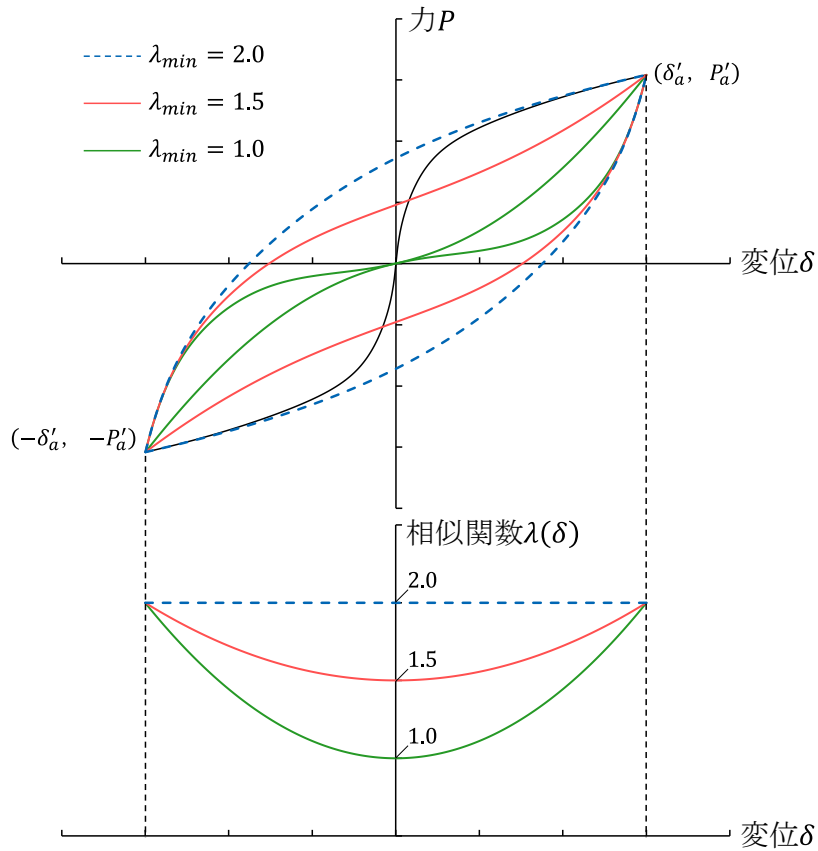
ここで、 h_{max} , κ ：式(7.16.10)で用いるパラメータ

式(7.16.11)の補正係数 $C_1(\delta'_a)$ および $C_2(\delta'_a)$ は以下の式より算出します。

$$C_1(\delta'_a) = \frac{C_1(0) + C_1(\infty)}{2} + \frac{C_1(0) - C_1(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\alpha}{|\delta'_a/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.16.12)$$

$$C_2(\delta'_a) = \frac{C_2(0) + C_2(\infty)}{2} + \frac{C_2(0) - C_2(\infty)}{2} \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{\frac{\beta}{|\delta'_a/\delta_r|} + 1} \right\} \quad (7.16.13)$$

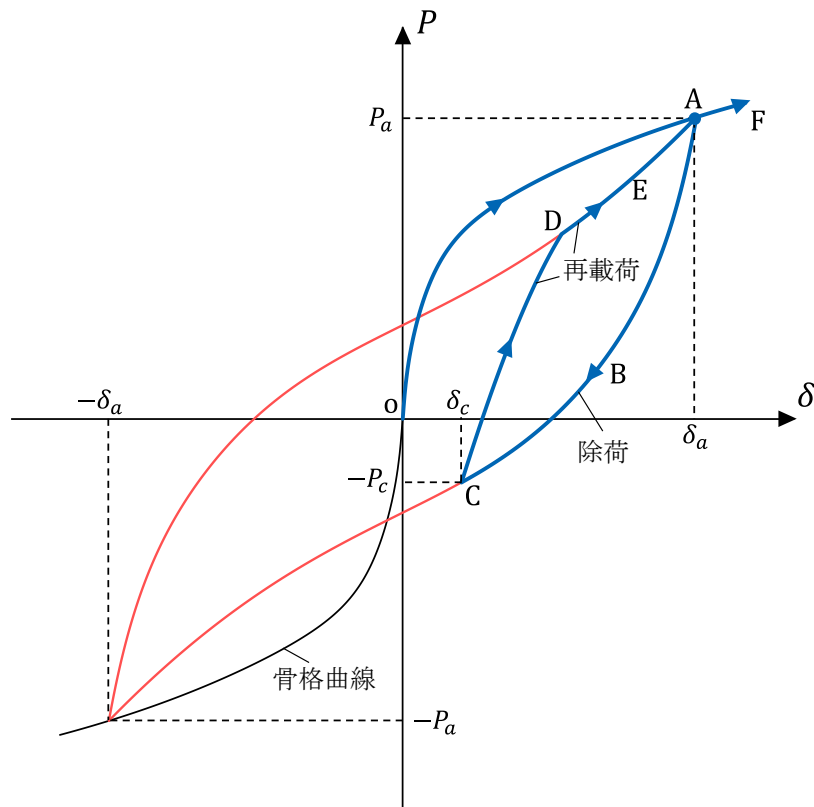
ここで、各相似比 λ_{min} における履歴曲線を以下に示します。



$\lambda_{min} = 2.0$ の場合、相似関数 $\lambda(\delta)$ は常に 2 のため、通常の Masing 則と同様に紡錘型の履歴曲線となります。 λ_{min} が 2 より小さい場合、履歴曲線は S 字型のループを描く形になります。なお、 λ_{min} が 1.0 未満の場合、履歴曲線が原点付近で交差する形状になります。そのため、本プログラムでの λ_{min} の下限値は 1.0 とします。

履歴ルールは以下のようになります。

- ① δ が折り返すまでは，式(7.16.1)で示す骨格曲線上を進みます．(O→A)
- ② δ が点 A で除荷されると，折り返し点を(δ_a, P_a)とした式(7.16.4)で示す履歴曲線上を進みます．(A→B→C)
- ③ δ が点 C で再載荷されると，折り返し点を($\delta_c, -P_c$)とした式(7.16.4)で示す履歴曲線上を進みます．(C→D)
- ④ 点 D で③の履歴曲線が②の履歴曲線に到達すると，点 A に到達するまで②の履歴曲線上を進みます．(D→E→A)
- ⑤ 履歴曲線が初期の折り返し点(δ_a, P_a)に達すると，除荷以前に進行していた骨格曲線上を進みます．(A→F)



参考文献

- 1) Tatsuoka, F. and Shibuya, S. : Deformation characteristics of soils and rocks from field and laboratory tests, Theme Lecture 1, Proc. of Ninth Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol.2, pp.101-170, 1992.
- 2) 室野剛隆，野上雄太：S字型の履歴曲線の形状を考慮した土の応力～ひずみ関係，第12回日本地震工学シンポジウム，pp.494-497，2006.
- 3) 吉田望，澤田純男，竹島康人，三上武子，澤田俊一：履歴減衰特性が地盤の地震応答に与える影響，土木学会地震工学論文集，Vol.27，2003.

7. 17. 衝突ばね

骨格曲線はバイリニアとします.

履歴ルールは以下の通りです.

① $\delta_1^- < \delta < \delta_1^+$ の場合,

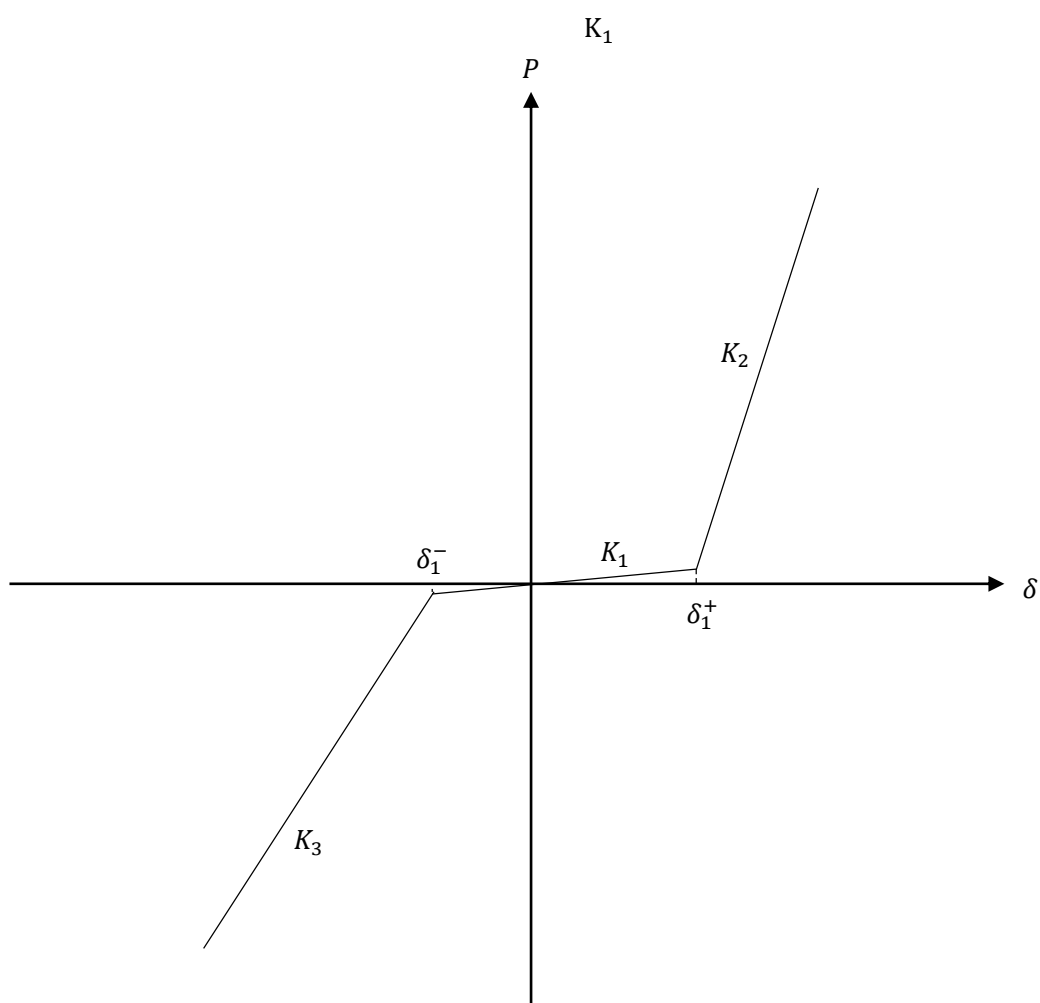
原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます. $K_1 = 0$ の場合は δ 軸上を動きます.

② $\delta > \delta_1^+$ の場合,

勾配 K_2 の直線上を動きます.

③ $\delta < \delta_1^-$ の場合,

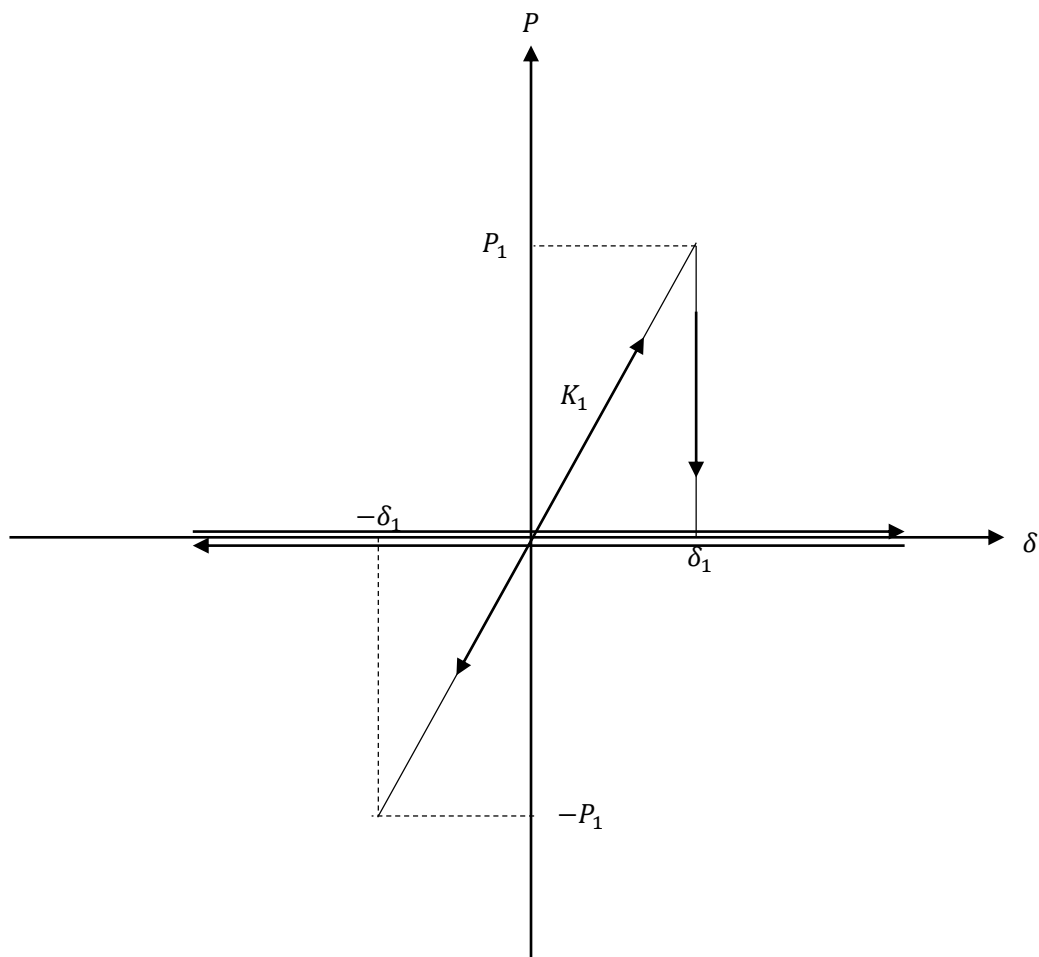
勾配 K_3 の直線上を動きます.



7. 18. ヒューズばね

ヒューズばねの履歴特性は以下の通りです.

- ① δ が一度も $\pm\delta_1$ を超えない場合は原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます.
- ② δ が初めて $\pm\delta_1$ を超えた場合, それ以降は δ 軸上を動きます.



7. 19. スリップばね

骨格曲線はバイリニアです.

履歴ルールは以下の通りです.

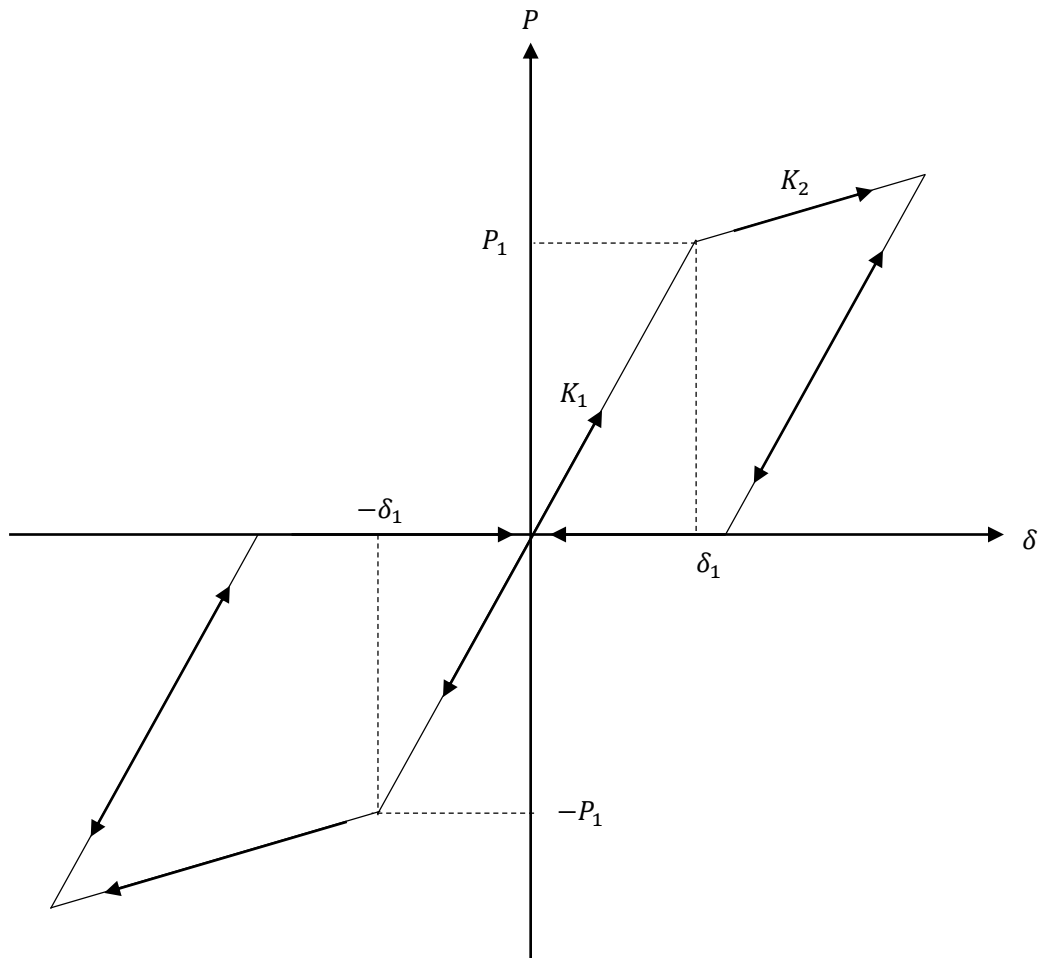
- ① δ が一度も $\pm\delta_1$ を超えない場合は原点を通る勾配 K_1 の直線上を動きます.
- ② δ が初めて $\pm\delta_1$ を超えた場合, 勾配 K_2 の直線上を進みます.
- ③ 勾配 K_2 の直線上から戻るときはその反転位置から勾配 K_1 で $P = 0$ まで戻り, さらに進むときは δ 軸上を原点まで進みます. 反転位置は δ_{\max} となります.
- ④ 以後, $\delta_{\max}^- < \delta < \delta_{\max}^+$ の範囲では,

$$\delta_{\max}^- \left(1 + \frac{\delta_{\max}^-}{K_1}\right) < \delta < \delta_{\max}^+ \left(1 - \frac{\delta_{\max}^+}{K_1}\right) \text{ の場合,}$$

δ 軸上を移動します.

$$\delta_{\max}^- < \delta < \delta_{\max}^- \left(1 + \frac{\delta_{\max}^-}{K_1}\right) \text{ または } \delta_{\max}^+ \left(1 - \frac{\delta_{\max}^+}{K_1}\right) < \delta < \delta_{\max}^+ \text{ の場合,}$$

勾配 K_1 の直線上を移動します.



7. 20. 軸力変動（共通）

軸力変動の履歴則は基本的に各履歴モデルに準拠します。軸力変動に伴う骨格曲線の更新やそれによる履歴ルールの追加規則は以下の通りとなります。なお、以下の説明は負側についても同様となります。

$M_y(i)$: ステップ I での降伏モーメント

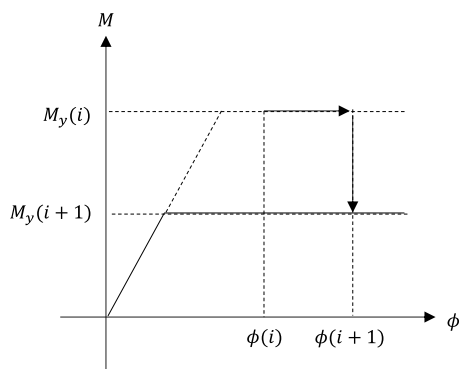
$M_y(i+1)$: ステップ i+1 での降伏モーメント

$\phi(i)$: ステップ i+1 での曲率

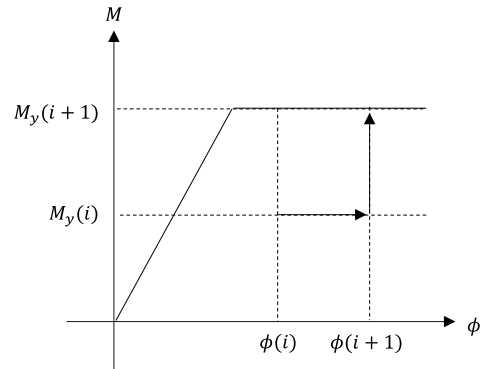
$\phi(i+1)$: ステップ i+1 での曲率

① 骨格曲線の移動

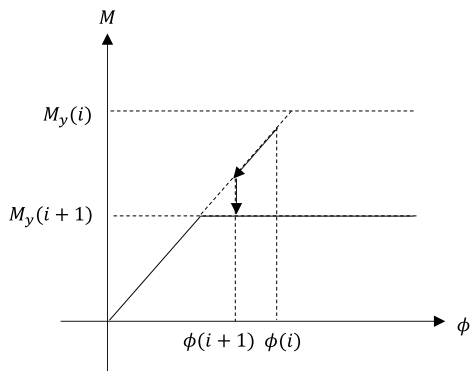
ステップ i で骨格曲線上にあり、ステップ i+1 で曲率が増大する場合、もしくはステップ i で初期剛性上にいる場合はステップ i+1 で新たな骨格曲線上にのせます。



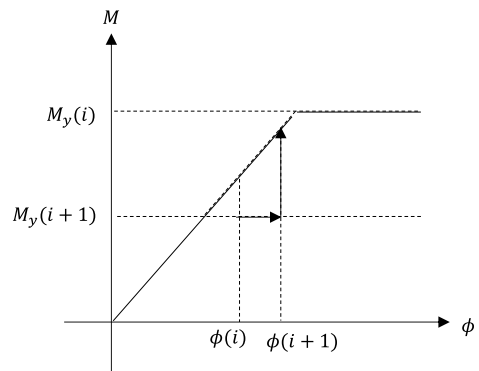
(A)



(B)



(C)



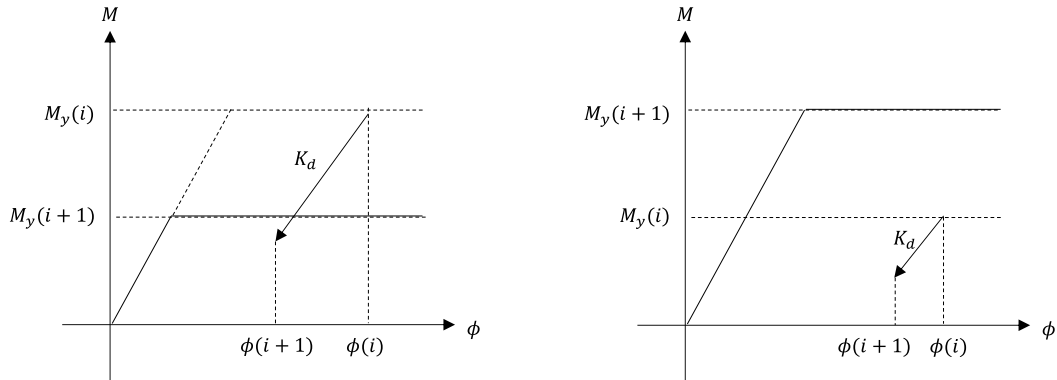
(D)

② 除荷の開始

ステップ i で第2勾配以降の骨格曲線上にあり，そこから除荷を受けた場合は，各履歴モデルのルールに準じた戻り勾配 K_d の直線で戻ります． K_d は次に再除荷を受けるまでは軸力が変動しても更新しないものとしします．

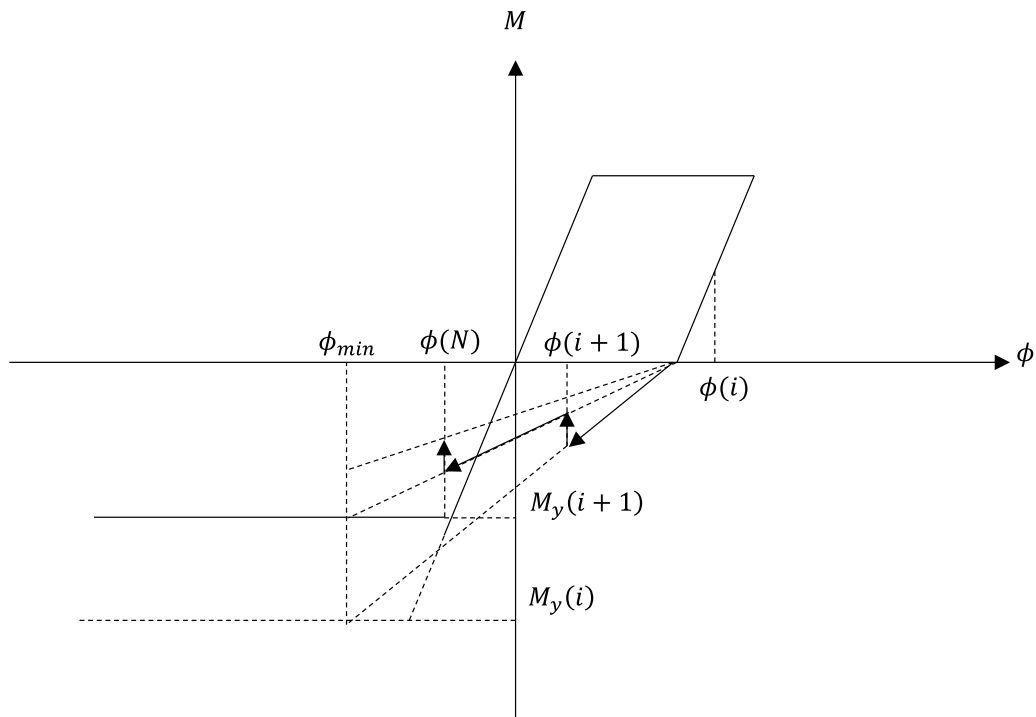
$$K_d = K_1 \cdot \left| \frac{\phi_{max}}{\phi_1(N)} \right|^\alpha \quad (7.20.1)$$

ただし， ϕ_{max} は最大経験ひずみで $\phi_{max} < \phi_1$ の場合は $\phi_{max} = \phi_1$ とします．



③ 最大点指向

JR 総研剛性低減 RC 型等の履歴モデルでは，除荷曲線が $M = 0$ を超えると反対側の最大曲率点 ϕ_{min} を目指します．この時，骨格曲線が軸力の変動に応じて変化するため，目標とする最大点(ϕ_{min} と骨格の交点)も変化します．最大点を指向している最中はこの変化に応じて目標とする最大点を毎回更新するものとしします．



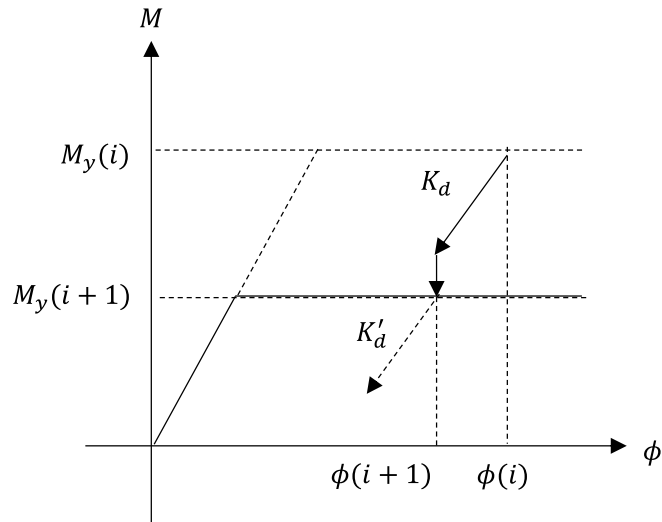
④ 内部ループ

内部ループがある履歴モデルの場合，以下の規則に従います．

- 1) 再載荷または再除荷時の戻り剛性 K_d は，再載荷または再除荷時点の第1折れ点曲率 $\phi_1(N)$ を用いて計算し， $M = 0$ を超えるまで一定剛性で戻ります．
- 2) 最大点を指向している最中は軸力変動に応じて目標とする最大点を毎回更新するものとします．

⑤ 特殊な場合

除荷中にもかかわらず骨格曲線の外に出てしまった場合は，再度骨格曲線上に載せ，そこから除荷曲線を引き直します．JR 剛性低減 RC 型などの履歴モデルでは，新たな除荷曲線の勾配 K_d はステップ $i + 1$ での第1折れ点曲率 $\phi_1(N)$ を使用して更新します．



7. 21. 履歴曲線の追跡

梁要素は要素の中央で曲げを評価して梁全体の剛性を変化させます。

梁要素の XY 平面における曲げとせん断の要素剛性行列を抜き出すと以下の通りになります。

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} \\ \frac{-12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} \\ \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(2-\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} & \frac{-6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & \frac{(4+\phi_y)EI_z}{L(1+\phi_y)} \end{bmatrix} \quad \text{Sym}$$

ただし、 $\phi_y = \frac{12EI_z}{GA_y L^2}$

これをせん断と曲げに分離して書き直すと、

$$K = GA_y \frac{\phi_y}{1+\phi_y} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} \end{bmatrix} + EI_z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

同様に XZ 平面における曲げとせん断の要素剛性行列をせん断と曲げに分離して書き直すと、

$$K = GA_z \frac{\phi_z}{1+\phi_z} \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & \frac{L}{4} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} & \frac{1}{L} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{L}{4} & \frac{1}{2} & \frac{L}{4} \end{bmatrix} + EI_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

梁の各変形量の増分は要素座標系を用いて次のように表すことができます。

軸ひずみ

$$\varepsilon = \frac{u_x^j - u_x^i}{L}$$

せん断角

$$\Delta\gamma_y = \frac{\phi_y}{1 + \phi_y} \left(\frac{\Delta u_y^j - \Delta u_y^i}{L} - \frac{\Delta\theta_z^j + \Delta\theta_z^i}{2} \right)$$

$$\Delta\gamma_z = \frac{\phi_z}{1 + \phi_z} \left(\frac{\Delta u_z^j - \Delta u_z^i}{L} + \frac{\Delta\theta_y^j + \Delta\theta_y^i}{2} \right)$$

曲率（中央）

$$\rho_z = \frac{\Delta\theta_z^j - \Delta\theta_z^i}{L}$$

$$\rho_y = \frac{\Delta\theta_y^j - \Delta\theta_y^i}{L}$$

ここに、

u_x^i, u_x^j : i 端、 j 端の X_l 方向の変位

$\Delta u_y^i, \Delta u_y^j$: i 端、 j 端の Y_l 方向の増分変位

$\Delta u_z^i, \Delta u_z^j$: i 端、 j 端の Z_l 方向の増分変位

$\Delta\theta_y^i, \Delta\theta_y^j$: i 端、 j 端の Y_l 軸回りの増分回転角

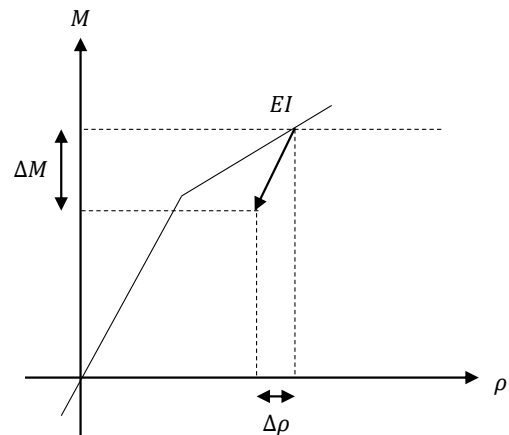
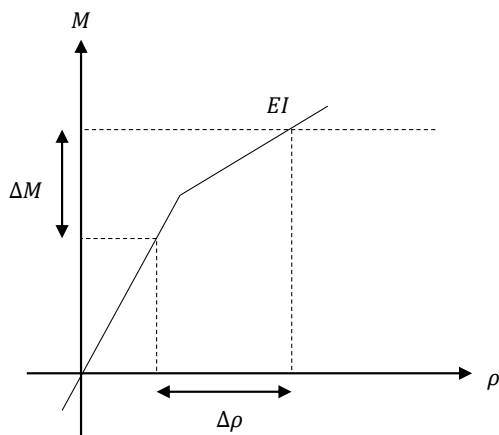
$\Delta\theta_z^i, \Delta\theta_z^j$: i 端、 j 端の Z_l 軸回りの増分回転角

梁のせん断力増分 ΔF_y は以下の式で求めます。

$$\Delta F_y^i = -GA_y \Delta\gamma_y \quad (7.21.1)$$

$$\Delta F_y^j = GA_y \Delta\gamma_y \quad (7.21.2)$$

履歴曲線から曲率増分に対する真の曲げモーメント増分 ΔM_z と新たな断面 2 次モーメント I_z を求めます。



梁両端での真の増分曲げモーメントは以下の式で求めます．

$$\Delta M_z^i = -\frac{L\Delta F_y^j}{2} - \Delta M_z \quad (7.21.3)$$

$$\Delta M_z^j = -\frac{L\Delta F_y^j}{2} + \Delta M_z \quad (7.21.4)$$

さらに，幾何学的非線形性を考慮する場合は上記の $\Delta F_y^i, \Delta F_y^j, \Delta M_z^i, \Delta M_z^j$ に幾何剛性分の部材力が付加されます．ただし，履歴曲線から得られた曲げモーメントには幾何剛性分は含まれません．

また，XZ 平面では同様に，

$$\Delta M_y^i = \frac{L\Delta F_z^j}{2} - \Delta M_y \quad (7.21.5)$$

$$\Delta M_y^j = \frac{L\Delta F_z^j}{2} + \Delta M_y \quad (7.21.6)$$

となります．

8. 作用荷重

8.1. 静的荷重

isas では節点荷重, 要素荷重, 自重・慣性力, 温度荷重の 4 種類の静的荷重を考慮できます.

静的荷重は全て初期荷重としても増分荷重としても使用できます.

静的荷重 F_{static} は以下の式で計算されます.

$$F_{static} = F_{node} + F_{element} + F_{inertia} + F_{temperature} \quad (8.1.1)$$

ここで,

F_{node} : 節点荷重

$F_{element}$: 要素荷重

$F_{inertia}$: 自重・慣性力

$F_{temperature}$: 温度荷重

です.

8.1.1. 節点荷重

節点荷重は節点に作用する集中荷重として設定し, 以下の式で計算されます.

$$F_{node} = \sum_{i=1}^n F_i \quad (8.1.2)$$

ただし, F_i : 節点 i に作用する集中荷重

8.1.2. 要素荷重

要素荷重^{1),2)}は要素内に作用する荷重です. 要素集中荷重および要素分布荷重として設定された荷重を等価節点力に変換して作用させます. 要素荷重は梁要素とトラス要素に作用させることが可能です.

梁要素の軸方向の形状関数は以下のように定義されます.

$$H(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{cases} \quad (8.1.3)$$

軸方向に分布荷重 $p(x)$ が作用しているときの等価節点力 $F_{element}$ は以下のように表されます.

$$F_{element} = \int_0^L p(x)H(x)dx \quad (8.1.4)$$

梁要素の XY 平面内のせん断と曲げの形状関数は以下のように定義されます.

$$H(x) = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \\ x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \\ -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (8.1.5)$$

梁要素のせん断方向に分布荷重 $p(x)$ が作用しているときの等価節点力 $F_{element}$ は以下のよう
に表されます。

$$F_{element} = \int_0^L p(x)H(x)dx \quad (8.1.6)$$

要素に作用している任意の荷重 $q(x)$ の等価節点力 $F_{element}$ は形状関数を用いて以下の式で表
されます。

$$F_{element} = \int_0^L q(x)H(x)dx \quad (8.1.7)$$

参考文献

- 1) J. N. Reddy: An Introduction To The Finite Element Method Third Edition, Mcgraw-Hill Education, 2005.
- 2) Young W. Kwon, Hyochoong Bang: The Finite Element method Using MATLAB Second Edition, CRC Press, 2000.

8.1.3. 自重・慣性力

自重・慣性力は構造物に作用する加速度を設定し、以下の式で求められる慣性力として作用
させます。

$$F_{inertia} = M(I_x\ddot{u}_x + I_y\ddot{u}_y + I_z\ddot{u}_z) \quad (8.1.8)$$

ただし、 \ddot{u}_x : x 方向作用加速度

\ddot{u}_y : y 方向作用加速度

\ddot{u}_z : z 方向作用加速度

I_x : 並進 x 方向の自由度を 1, それ以外の自由度を 0 としたベクトル

I_y : 並進 y 方向の自由度を 1, それ以外の自由度を 0 としたベクトル

I_z : 並進 z 方向の自由度を 1, それ以外の自由度を 0 としたベクトル

8.1.4. 温度荷重

温度荷重は要素内に作用する荷重です。温度荷重として設定された荷重を等価節点力に変換して作用させます。温度荷重は梁要素とトラス要素に作用させることが可能です。

温度荷重の軸力，曲げモーメントの等価節点力はそれぞれ以下の式で計算します。

- ・ 軸力

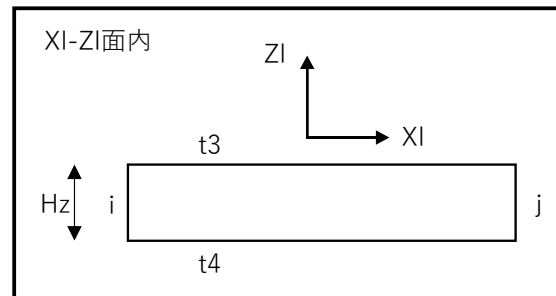
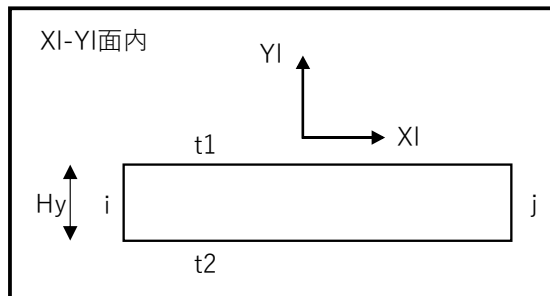
$$\begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{xj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)/2 \cdot EA \\ \alpha(t_1 + t_2 + t_3 + t_4)/2 \cdot EA \end{Bmatrix} \quad (8.1.9)$$

- ・ 曲げモーメント

$$\begin{Bmatrix} M_{yi} \\ M_{zi} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha(t_3 - t_4)/H_z \cdot EI_y \\ \alpha(t_1 - t_2)/H_y \cdot EI_z \\ \alpha(t_3 - t_4)/H_z \cdot EI_y \\ -\alpha(t_1 - t_2)/H_y \cdot EI_z \end{Bmatrix} \quad (8.1.10)$$

ここで，

α	: 線膨張係数
E	: ヤング係数
A	: 断面積
I_y, I_z	: 断面 2 次モーメント
h_y, h_z	: 断面高さ
t_1, t_3	: 上面温度変化量
t_2, t_4	: 下面温度変化量



8.2. 動的荷重

8.2.1. 単一加速度入力

単一加速度入力時は、全支点が一樣の変位を受けているとします。絶対変位 u^t を強制変位と相対変位に分けると以下の式で表すことができます。

$$u^t = \begin{bmatrix} u_a^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a^k \\ u_b^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.2.1)$$

ここで、第1項：強制変位

第2項：相対変位

a ：内部自由度

b ：加振自由度

です。

絶対変位系での運動方程式は以下のようになります。

$$M\ddot{u}^t + C\dot{u}^t + Ku^t = 0 \quad (8.2.2)$$

内部自由度と加振自由度に分けると以下のようになります。

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_a^t \\ \ddot{u}_b^t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{aa} & C_{ab} \\ C_{ba} & C_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_a^t \\ \dot{u}_b^t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a^t \\ u_b^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.2.3)$$

第1行を整理すると以下のようになります。

$$M_{aa}\ddot{u}_a^t + C_{aa}\dot{u}_a^t + K_{aa}u_a^t = -(M_{ab}\ddot{u}_b^t + C_{ab}\dot{u}_b^t + K_{ab}u_b^t) \quad (8.2.4)$$

さらに、

$$M_{aa}\ddot{u}_a + C_{aa}\dot{u}_a + K_{aa}u_a = -(M_{aa}\ddot{u}_a^k + M_{ab}\ddot{u}_b^t + C_{aa}\dot{u}_b^k + C_{ab}\dot{u}_b^t + K_{aa}u_b^k + K_{ab}u_b^t) \quad (8.2.5)$$

剛体変位であるため、強制変位は以下のように表されます。

$$\begin{bmatrix} u_a^k \\ u_b^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \end{bmatrix} u_e \quad (8.2.6)$$

ただし、

I_a, I_b ：すべての要素が1の列ベクトル

剛体変形であることから、以下の式が成り立ちます。

$$K_{aa}u_a^k + K_{ab}u_b^k = 0 \quad (8.2.7)$$

さらに、慣性項に比較して減衰項が十分小さいことを考えてこれを無視すると以下運動方程式が導かれます。

$$M_{aa}\ddot{u}_a + C_{aa}\dot{u}_a + K_{aa}u_a = -M_{aa}I_a\ddot{u}_e - M_{ab}I_b\ddot{u}_e \quad (8.2.8)$$

動的解析の出力では、加速度は絶対加速度、速度は相対速度、変位は相対変位として出力されます。

8.2.2. 多点加速度入力

多点加速度入力¹⁾時は、各支点が異なる変位を受けているとします。

構造物の絶対変位 X_1 は境界部に生じる絶対変位 X_2 によって生じる構造物の絶対変位 X_0 とこの変位に対する相対変位 Y を用いて以下の式で表すことができます。

$$X_1 = X_0 + Y \quad (8.2.9)$$

構造物に対する外力 P_1 と変位 u_1 、境界に生じる反力 P_2 と変位 u_2 の関係は、

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (8.2.10)$$

と表されます。

ここで、

K_{11} : 構造物の剛性と構造物と境界間の剛性の和

$K_{12} = K_{21}$: 構造物との境界間の剛性の和

K_{22} : 境界より外側の剛性

となります。

構造物に作用する外力 $P_1 = 0$ 、 $u_2 = X_2$ とすると、境界変位 X_2 における構造物に生じる変位 $u_1 = X_0$ は第1行から以下の式で求められます。

$$X_0 = -K_{11}^{-1} K_{12} X_2 = S X_2 \quad (8.2.11)$$

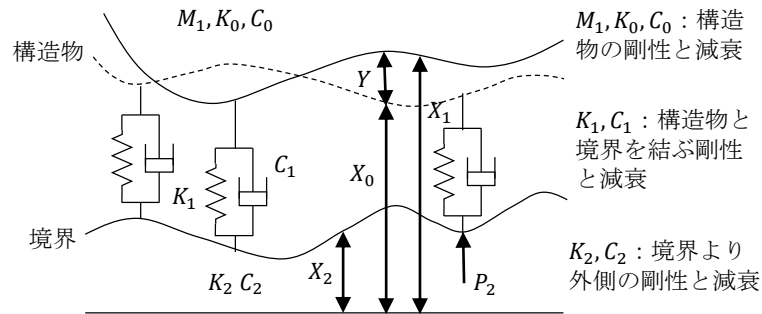
また、運動方程式は、次式のようにになります。

$$\begin{Bmatrix} M_1 \ddot{X}_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.2.12)$$

ここで、 C_{11} : 構造物の減衰と構造物と境界間の減衰の和

$C_{12} = C_{21}$: 構造物と境界間の減衰

C_{22} : 境界より外側の減衰



1 行目より、構造物のつり合い式は

$$M\ddot{X}_1 + C_{11}\dot{X}_1 + K_{11}X_1 = -C_{12}\ddot{X}_2 - K_{12}X_2 \quad (8.2.13)$$

式(8.2.9)の X_0 を式(8.2.11)に代入し、その結果を式(8.2.13)に代入すると

$$M_1\ddot{Y} + C_{11}\dot{Y} + K_{11}Y = -M_1S\ddot{X}_2 - C_{11}S\ddot{X}_2 - C_{12}\ddot{X}_2 \quad (8.2.14)$$

ここで、減衰が剛性に比例すると仮定すると、

$$C_{11}S\ddot{X}_2 = -C_{11}K_{11}^{-1}K_{12}\ddot{X}_2 = -C_{11}C_{11}^{-1}\ddot{X}_2 = -C_{12}\ddot{X}_2 \quad (8.2.15)$$

この式を式(8.2.14)に代入すると、加速度を入力としたつり合い式が得られます。

$$M_1\ddot{Y} + C_{11}\dot{Y} + K_{11}Y = -M_1S\ddot{X}_2 \quad (8.2.16)$$

参考文献

- 1) 山本泰幹，藤野陽三，矢部正明：地震観測された長大吊構造系橋梁の道德性と動的解析モデルによる再現性，土木学会論文集 A，Vol.65 No3，pp.738-757，2009.

9. 解析機能

9.1. 固有値解析

サブスペース法により固有値解析を行います。サブスペース法は、大規模な固有値問題を部分空間の固有値問題に帰着させて解く方法です。

まず、初期反復ベクトルを設定します。

$$X_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \quad (9.1.1)$$

ここで、 X : 反復ベクトル

m : 求めたい固有値の次数

反復ベクトルに M を乗じます。

$$Z = MX_k \quad (9.1.2)$$

部分空間への射影マトリクス Y_{k+1} を求めます。

$$KY_{k+1} = Z \quad (9.1.3)$$

$$Y_{k+1} = K^{-1}MX_k \quad (9.1.4)$$

剛性マトリクス K と質量マトリクス M を部分空間へ射影すると

$$\tilde{K}_{k+1} = Y_{k+1}^T KY_{k+1} \quad (9.1.5)$$

$$\tilde{M}_{k+1} = Y_{k+1}^T MY_{k+1} \quad (9.1.6)$$

ここで、 \tilde{K} : 剛性マトリクスの射影マトリクス

\tilde{M} : 質量マトリクスの射影マトリクス

部分空間の固有値問題は次式のようになります。

$$\tilde{K}P_{k+1} = \lambda_{k+1}\tilde{M}_{k+1}P_{k+1} \quad (9.1.7)$$

ここで、 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$: 部分空間の固有ベクトル

部分空間の固有ベクトルを元の空間へ変換します。

$$X_{k+1} = Y_{k+1}P_{k+1} \quad (9.1.8)$$

収束判定を行い、収束していなければ反復ベクトルに再度 M を乗じ収束計算を行います。

収束判定は次式となります。

$$\frac{|\lambda_i^{(k+1)} - \lambda_i^{(k)}|}{\lambda_i^{(k+1)}} \leq \varepsilon \quad (9.1.9)$$

ここで、 ε ：許容値

収束していれば、固有値 λ 、固有ベクトル X が求められます。

9.2. 静的解析

9.2.1. 荷重制御

荷重制御は入力された荷重の分布形状と荷重倍率から増分荷重を求め、それに対する増分変位を計算する方法です。

静的解析の方程式を増分形式で表すと次式のようになります。

$$K \cdot \Delta U = \Delta R + R_{unb} \quad (9.2.1)$$

ここで、 K ：剛性マトリクス

ΔU ：増分変位ベクトル

ΔR ：増分荷重ベクトル

R_{unb} ：不平衡力ベクトル

荷重制御では、荷重増分ベクトルは、次式で求めます。

$$\Delta R = \sum_{k=1}^n (\Delta \lambda \cdot R_{ref,k}) \quad (9.2.2)$$

ここで、 ΔR ：増分荷重ベクトル

$\Delta \lambda$ ：増分荷重倍率

$R_{ref,k}$ ：荷重ケース k の基準荷重分布形状

n ：荷重ケース数

R_{ref} は入力データで定義される荷重分布です。 $\Delta \lambda$ はステップごとの R_{ref} に対する荷重倍率です。各ステップの増分荷重には複数の荷重ケースを設定することができます。

非線形解析では、不平衡力は次のステップに持ち越されます。反復計算は行われなため、荷重の分割数を増やす必要があります。

荷重増分法は、増分荷重に対応する増分変位を求める方法であるため、構造系全体の剛性が負になるなど、ある荷重に対応する解が複数存在する場合には適用できません。このような場合は変位制御を使用してください。

9.2.2. 変位制御

変位制御は基準荷重分布形状と1自由度分の節点変位ベクトルから増分荷重倍率、増分荷重を求め、それに対する増分変位を計算していく方法です。変位制御でも荷重制御と同様に複数の荷重ケースを扱うことができます。

拘束する節点増分変位ベクトルを Δu_j 、それ以外の節点増分変位ベクトルを Δu_i として、静

的解析の方程式を書き直すと次式のようにになります。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_j \end{Bmatrix} = \Delta \lambda \cdot \begin{Bmatrix} R_{ref,i} \\ R_{ref,j} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{unb,i} \\ R_{unb,j} \end{Bmatrix} \quad (9.2.3)$$

ここで, $K_{ii}, K_{ij}, K_{ji}, K_{jj}$: 剛性マトリクス

$\Delta u_i, \Delta u_j$: 増分変位ベクトル

$\Delta \lambda$: 増分荷重倍率

$R_{ref,i}, R_{ref,j}$: 基準荷重分布形状

$R_{unb,i}, R_{unb,j}$: 不平衡力ベクトル

λ を未知数として書き換えると次式のようにになります。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & -R_{ref,i} \\ K_{ji} & -R_{ref,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{unb,i} \\ R_{unb,j} \end{Bmatrix} - \Delta u_j \begin{Bmatrix} K_{ij} \\ K_{jj} \end{Bmatrix} \quad (9.2.4)$$

式を展開すると次式のようにになります。

$$K_{ii} \cdot \Delta u_i = \Delta \lambda \cdot R_{ref,i} + R_{unb,i} - \Delta u_j \cdot K_{ij} \quad (9.2.5)$$

$$K_{ji} \cdot \Delta u_i = \Delta \lambda \cdot R_{ref,j} + R_{unb,j} - \Delta u_j \cdot K_{jj} \quad (9.2.6)$$

この式から 3 つの式を抽出します。

$$K_{ii} \cdot \Delta u_{i,1} = R_{ref,i} \quad (9.2.7)$$

$$K_{ii} \cdot \Delta u_{i,2} = -\Delta u_j \cdot K_{ij} \quad (9.2.8)$$

$$K_{ii} \cdot \Delta u_{i,3} = R_{unb,i} \quad (9.2.9)$$

3 つの式から $\Delta u_{i,1}$, $\Delta u_{i,2}$, $\Delta u_{i,3}$ を求め, Δu_i をその和で表せば次式のようにになります。

$$\Delta u_i = \Delta \lambda \cdot \Delta u_{i,1} + \Delta u_{i,2} + \Delta u_{i,3} \quad (9.2.10)$$

この(4)式を代入すれば次式のようにになります。

$$\Delta \lambda \cdot K_{ji} \cdot \Delta u_{i,1} + K_{ji} \cdot \Delta u_{i,2} = \Delta \lambda \cdot R_{ref,j} + R_{unb,j} - \Delta u_j \cdot K_{jj} \quad (9.2.11)$$

$$\Delta \lambda \cdot R_{ref,j} - \Delta \lambda \cdot K_{ji} \cdot \Delta u_{i,1} = -R_{unb,j} + K_{ji} \cdot \Delta u_{i,2} - \Delta u_j \cdot K_{jj} \quad (9.2.12)$$

$$\Delta \lambda = \frac{-R_{unb,j} + K_{ji} \cdot \Delta u_{i,2} + u_j \cdot K_{jj}}{R_{ref,j} - K_{ji} \cdot \Delta u_{i,1}} \quad (9.2.13)$$

非線形解析では, 不平衡力は次の増分ステップに持ち越されます。変位制御は指定した節点の増分変位から対応する増分荷重倍率を求める方法であるため, ある荷重値に対応する解

が複数存在するような場合でも適用することができます。

9.2.3. 強制変位

強制変位は基準変位分布形状とステップの増分荷重倍率から節点に強制的に増分変位を作用させて、非拘束自由度に対する等価な荷重ベクトルを求め、非拘束自由度の増分変位を計算する方法です。

強制変位を作用させる自由度の増分変位ベクトルを Δu_j 、それ以外の節点増分変位ベクトルを Δu_i として、静的解析の方程式を書き直すと次式ようになります。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_{unb,i} \\ R_{unb,j} \end{Bmatrix} \quad (9.2.14)$$

$$\Delta u_j = \Delta \lambda \cdot D_{ref} \quad (9.2.15)$$

ここで、 $K_{ii}, K_{ij}, K_{ji}, K_{jj}$ ：剛性マトリクス

$\Delta u_i, \Delta u_j$ ：増分変位ベクトル

$\Delta \lambda$ ：増分荷重倍率

D_{ref} ：基準荷重分布形状

$R_{unb,i}, R_{unb,j}$ ：不平衡力ベクトル

λ を未知数として書き換えると次式ようになります。

$$\begin{bmatrix} K_{ii} & -R_{ref,i} \\ K_{ji} & -R_{ref,j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{unb,i} \\ R_{unb,j} \end{Bmatrix} - \Delta u_j \begin{Bmatrix} K_{ij} \\ K_{jj} \end{Bmatrix} \quad (9.2.16)$$

第一式を展開すると次式ようになります。

$$K_{ii} \cdot \Delta u_i + K_{ij} \cdot \Delta u_j = R_{unb,i} \quad (9.2.17)$$

この式をまとめると、次式となります。

$$K_{ii} \cdot \Delta u_i = \Delta R_i \quad (9.2.18)$$

$$\Delta R_i = R_{unb,i} - K_{ij} \cdot \Delta u_j \quad (9.2.19)$$

(9.2.15)式から強制変位を作用させる自由度に対する増分変位を求め、(9.2.19)式から非拘束自由度に対する等価な荷重ベクトルを求め、(9.2.18)式を解きます。非線形解析では、不平衡力は次の増分ステップに持ち越されます。

9.3. 動的解析

動的解析には増分系の Newmark- β 法を用いています. パラメータ β , δ はそれぞれ 0.25, 0.5 としています.

時刻 t における質量マトリクス, 減衰マトリクス, 剛性マトリクスをそれぞれ M_t, C_t, K_t とし, 加速度ベクトルの増分, 速度ベクトルの増分, 変位ベクトルの増分, 外力ベクトルの増分をそれぞれ $d\ddot{U}_t, d\dot{U}_t, dU_t, dF_t$ とすると, 運動方程式は以下のようにあらわされます.

$$M_t d\ddot{U}_t + C_t d\dot{U}_t + K_t dU_t = dF_t \quad (9.3.1)$$

これを時刻 0 から $t + \Delta t$ まで積分すると,

$$\int_0^{t+\Delta t} M_t d\ddot{U}_t + \int_0^{t+\Delta t} C_t d\dot{U}_t + \int_0^{t+\Delta t} K_t dU_t = \int_0^{t+\Delta t} dF_t \quad (9.3.2)$$

ここで,

$$E_t = \int_0^t M_t d\ddot{U}_t + \int_0^t C_t d\dot{U}_t + \int_0^t K_t dU_t \quad (9.3.3)$$

$$F_{t+\Delta t} = \int_0^{t+\Delta t} dF_t \quad (9.3.4)$$

とおくと,

$$\int_t^{t+\Delta t} M_t d\ddot{U}_t + \int_t^{t+\Delta t} C_t d\dot{U}_t + \int_t^{t+\Delta t} K_t dU_t + E_t = F_{t+\Delta t} \quad (9.3.5)$$

ここで,

$$\ddot{U}_t = \int_0^t d\ddot{U}_t \quad (9.3.6)$$

$$\dot{U}_t = \int_0^t d\dot{U}_t \quad (9.3.7)$$

$$U_t = \int_0^t dU_t \quad (9.3.8)$$

$$\Delta\ddot{U}_t = \int_t^{t+\Delta t} d\ddot{U}_t \quad (9.3.9)$$

$$\Delta \dot{U}_t = \int_t^{t+\Delta t} d\dot{U}_t \quad (9.3.10)$$

$$\Delta U_t = \int_t^{t+\Delta t} dU_t \quad (9.3.11)$$

とおくと，運動方程式は

$$M_t \Delta \ddot{U}_t + C_t \Delta \dot{U}_t + K_t \Delta U_t + E_t = F_{t+\Delta t} \quad (9.3.12)$$

となります．

この式を用いて，時刻 t における系の状態をもとに，時刻 $t + \Delta t$ における系の状態を以下の手順で求めます．

ステップ 1

時刻 $t + \Delta t$ の荷重ベクトル $F_{t+\Delta t}$ を計算します．

ステップ 2

時刻 $t + \Delta t$ の荷重ベクトル $F_{t+\Delta t}$ に対する加速度，速度，変位の増分ベクトル $\Delta \ddot{U}_t$ ， $\Delta \dot{U}_t$ ， ΔU_t を求めます．

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \{(1 - \delta)\ddot{U}_t + \delta\ddot{U}_{t+\Delta t}\}\Delta t \quad (9.3.13)$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \dot{U}_t \Delta t + \left\{ \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{U}_t + \delta \ddot{U}_{t+\Delta t} \right\} \Delta t^2 \quad (9.3.14)$$

よって，速度，加速度の増分ベクトルは次式のように表されます．

$$\Delta \dot{U}_t = \{\ddot{U}_t + \delta \Delta \ddot{U}_t\} \Delta t \quad (9.3.15)$$

$$\Delta \ddot{U}_t = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left\{ \Delta U_t - \dot{U}_t \Delta t - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{U}_t \right\} \quad (9.3.16)$$

これを運動方程式に代入し， $\Delta \dot{U}_t$ ， $\Delta \ddot{U}_t$ を消去すると，

$$\left(K_t + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + \frac{\delta}{\beta t} C \right) \Delta U_t = F_{t+\Delta t} - E_t + M \left(\frac{1}{\beta \Delta t} \ddot{U}_t + \frac{1}{2\beta} \ddot{U}_t \right) + C \left\{ \frac{\delta}{\beta} \dot{U}_t + \left(\frac{\delta}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \dot{U}_t \right\} \quad (9.3.17)$$

この式から ΔU_t を求め，式に代入することで $\Delta \dot{U}_t$ ， $\Delta \ddot{U}_t$ を求めます．

ステップ 3

時刻 $t + \Delta t$ の変位, 速度, 加速度ベクトルを計算します.

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta U_t \quad (9.3.18)$$

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \dot{U}_t + \Delta \dot{U}_t \quad (9.3.19)$$

$$\ddot{U}_{t+\Delta t} = \ddot{U}_t + \Delta \ddot{U}_t \quad (9.3.20)$$

ステップ 4

不平衡力ベクトルを次式から求めます.

$$\gamma_{t+\Delta t} = \sum (K_t \Delta U_t - \Delta f_k) + \sum (C_t \Delta \dot{U}_t - \Delta f_c) \quad (9.3.21)$$

ここで, Δf_k : 増分変位 ΔU_t による要素の部材力増分

Δf_c : 増分速度 $\Delta \dot{U}_t$ による要素の減衰力増分

負担力ベクトルを次式から求めます.

$$E_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} - \gamma_{t+\Delta t} \quad (9.3.22)$$

ステップ 5

新たに剛性マトリクスを作り直します.

ステップ 6

時刻 t を Δt だけ進めてステップ 1 に戻ります.